Ανισότητες
και
Όρια

Δειγματική Διδασκαλία
Επιμέλεια – Παρουσίαση

Γιώργος Χριστοδουλίδης
1ο ΓΕΛ ΕΥΟΣΜΟΥ

Ανισότητες και Όρια

Διδακτικοί Στόχοι

1/ Η κατανόηση της σχέσης μεταξύ του προσήμου της συνάρτησης και του προσήμου του ορίου της.

2/ Η άναζήτηση εργαλείων και τεχνικών για τον εγκλωβισμό συνάρτησης μεταξύ ισοσυγκλινουσών συναρτήσεων.

3/ Η προσέγγιση της έννοιας της συνέχειας συνάρτησης σε σημείο.

4/ Η χρήση των ορίων στην εύρεση των ασυμπτώτων γραφικής παράστασης

Διδακτικά Εργαλεία

1/ Οι προτάσεις του σχολικού βιβλίου.

2/ Οι εφαρμογές που προκύπτουν.

2/ Οι παρατηρήσεις και τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τις προτάσεις αυτές.

3/ Η χρήση του λογισμικού GEOGEBRA για την εποπτική προσέγγιση και επαλήθευση των συμπερασμάτων.

4/ Παραδείγματα και ασκήσεις.

Μέθοδοι Προσέγγισης

1/ Απεικόνιση της ανισοτικής σχέσης δύο συναρτήσεων δια του GEOGEBRA

2/ Σύγκλιση των συναρτήσεων σε ένα σημείο χ_0 και εύρεση της ανισοτικής σχέσης των ορίων τους.

3/ Επαλήθευση της λογισμικής απεικόνισης δια των εφαρμογών των αλγεβρικών προτάσεων.

4/ Χρησιμοποίηση των ιδιοτήτων των απολύτων τιμών και γνωστών ανισοϊσοτήτων για τον εγκλωβισμό συνάρτησης μεταξύ δύο άλλων συναρτήσεων με κοινό όριο και λογισμική απεικόνιση της ανισοτικής σχέσης δια του GEOGEBRA.

5/ Εύρεση του κοινού ορίου των ισοσυγκλινουσών συναρτήσεων.

6/ Προσέγγιση δια των ανισοτήτων των απειριζόμενων συναρτήσεων.

7/ Απεικόνιση δια του GEOGEBRA των ασυμπτώτων και εύρεση αυτών με τη χρήση του ορίου συνάρτησης.

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ'ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΝΟΤΗΤΑ : ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΟΡΙΑ

ΠΡΟΤΑΣΗ 1

$f(\chi)<g(\chi)$, χ κοντά στο $\chi_0 \Rightarrow \lim\limits_{\chi\to\chi_0} f(\chi)\leq \lim\limits_{\chi\to\chi_0} g(\chi)$

ΑΣΚΗΣΗ 1

Δίνεται συνάρτηση f για την οποία ισχύει $\chi f(\chi)+1 < συν3\chi$, $\chi \in R$

Αν υπάρχει το $\lim\limits_{\chi\to 0} f(\chi)$ και είναι πραγματικός αριθμός να το υπολογίσετε.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για κάθε $\chi \in R$ ισχύει $\chi f(\chi)+1 < συν3\chi \Leftrightarrow \chi f(\chi) < συν3\chi - 1$

Αν $\chi < 0$ τότε $f(\chi) >$ .... οπότε $\lim\limits_{x\to 0^-} f(\chi) \geq$ .... $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(\chi) \geq$ .... (1)

Αν $\chi > 0$ τότε $f(\chi) <$ .... οπότε $\lim\limits_{x\to 0^+} f(\chi) \leq$ .... $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(\chi) \leq$ .... (2)

Από τις (1) και (2) έχουμε $\lim\limits_{x\to 0^-} f(\chi) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(\chi) =$ ...... άρα $\lim\limits_{x\to 0} f(\chi) =$ ....

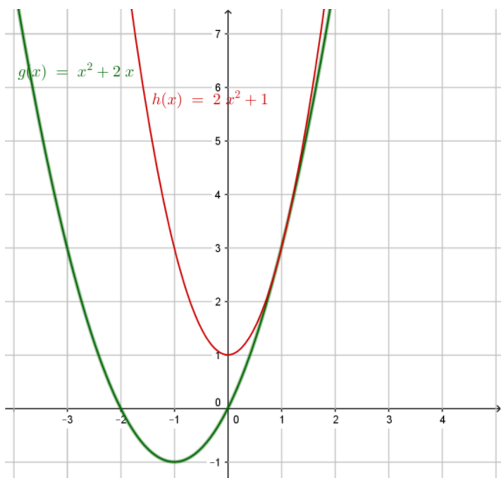
ΠΡΟΤΑΣΗ 2

$$\left.\begin{cases} g(\chi) \le f(\chi) \le h(\chi) \;, & \chi \text{ κοντά στο } \chi_0 \\ \lim\limits_{\chi\to\chi_0} g(\chi) = \lim\limits_{\chi\to\chi_0} h(\chi) = \ell \end{cases}\right\} \Rightarrow \lim_{\chi\to\chi_0} f(\chi) = \ell$$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Δίνεται συνάρτηση f για την οποία ισχύει $\chi^2 + 2\chi \le f(\chi) \le 2\chi^2 + 1 \,,\ \chi \in R$

Να βρείτε τα όρια α) $\lim\limits_{x\to 1} f(\chi)$ β) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(\chi) - f(1)}{\chi - 1}$



Παρατηρείτε κάποιο σημείο χ_0 όπου οι γραφικές παραστάσεις Cg και Ch συγκλίνουν;

Ποιό είναι αυτό το σημείο;

Ποιό φαίνεται να είναι το κοινό τους όριο ℓ σε αυτό το σημείο;

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$\lim\limits_{x\to 1} (\chi^2 + 2\chi) =$ ....και $\lim\limits_{x\to 1} (2\chi^2 + 1) =$ ....

άρα και $\lim\limits_{x\to 1} f(\chi) =$ ....

επίσης για χ=1 έχουμε ....άρα f(1) = ...

οπότε $\chi^2 + 2\chi -$ .... $\le f(\chi) - f(1) \le 2\chi^2 + 1 -$ ....

Αν $\chi < 1$ τότε ....

Αν $\chi > 1$ τότε ....

άρα $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(\chi) - f(1)}{\chi - 1} =$ ....

ΑΣΚΗΣΗ 3

Δίνεται συνάρτηση $f : R \to R$ για την οποία ισχύει

$$\left|\chi^{2} \cdot f(\chi) - \eta\mu^{2}\chi\right| \ \leq \ 2\chi^{4} \ , \chi \in R$$

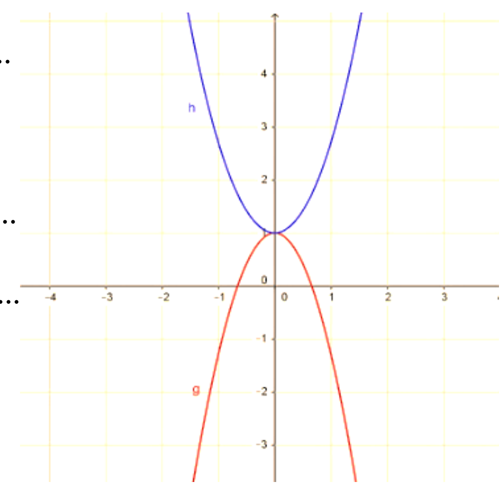
Να βρείτε τα όρια α) $\lim\limits_{x \to 0} f(\chi)$ β) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\chi \cdot f(\chi) - \eta\mu 2\chi}{\chi + \eta\mu\chi}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

α) Ισχύει $\left|\chi^{2} \cdot f(\chi) - \eta\mu^{2}\chi\right| \ \leq \ 2\chi^{4} \ , \chi \in R$

$\Leftrightarrow$ .... $\leq \chi^{2} \cdot f(\chi) - \eta\mu^{2}\chi \leq$ .... $\Leftrightarrow$ .... $\leq \chi^{2} \cdot f(\chi) \leq$ ....

.... $\leq \ f(\chi) \ \leq$ ....



Επειδή ....

....

τότε και ....

β) $$\lim_{x \to 0} \frac{\chi \cdot f(\chi) - \eta\mu 2\chi}{\chi + \eta\mu\chi} = \lim_{x \to 0} \frac{\chi \cdot \left[f(\chi) - \dfrac{\eta\mu 2\chi}{\chi} \right]}{\chi \cdot \left[1 + \dfrac{\eta\mu\chi}{\chi} \right]} = \text{..}$$

ΑΣΚΗΣΗ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g : R \to R$ για τις οποίες ισχύει

$$\lim_{x\to x_0} [f^2(\chi) + g^2(\chi)] = 0$$

Να αποδείξετε ότι $\lim_{x\to x_0} f(\chi) = \lim_{x\to x_0} g(\chi) = 0$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$|f(\chi)| = \sqrt{f^2(\chi)} \le$ .... άρα .... $\le f(\chi) \le$ ....

και επειδή ....

τότε και $\lim_{\chi\to\chi_0} f(\chi) =$ ....

Ομοίως για τη $g(\chi)$ έχουμε ....

ή θέτουμε $f^2(\chi)+g^2(\chi)=h(\chi) \Leftrightarrow g^2(\chi) = h(\chi) - f^2(\chi)$ οπότε και $\lim_{\chi\to\chi_0} g^2(\chi) =$ ....

ΑΣΚΗΣΗ 5

Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = \chi \cdot \eta\mu \dfrac{1}{\chi}$, $\chi \in \mathbb{R} - \{0\}$

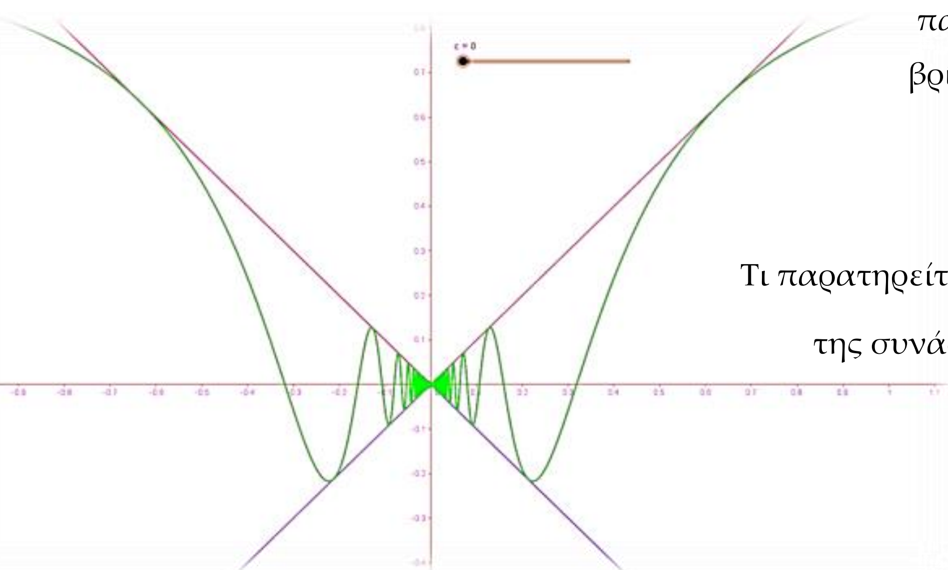
Να εξετάσετε αν υπάρχει το $\lim\limits_{x \to 0} f(\chi)$ και σε περίπτωση που υπάρχει να το βρείτε

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για κάθε $\chi \in$..................... ισχύει : $|f(\chi)| = \left|\chi \cdot \eta\mu \dfrac{1}{\chi}\right| = |\chi| \cdot \left|\eta\mu \dfrac{1}{\chi}\right| \leq$ ....

άρα .... $\leq f(\chi) \leq$ ....

Τι παρατηρείτε για τις γραφικές παραστάσεις C_g και C_h που βρίσκονται εκατέρωθεν της C_f;



Τι παρατηρείτε για τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(\chi) = \chi \cdot \eta\mu \dfrac{1}{\chi}$

Πράγματι $\lim\limits_{x \to 0}(..........) = \lim\limits_{x \to 0}(..........) =$ .... οπότε και $\lim\limits_{x \to 0}(\chi \cdot \eta\mu \dfrac{1}{\chi}) =$ ....

ΑΣΚΗΣΗ 6

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f^3(\chi)+2016\cdot f(\chi)+2017=\chi$, $\chi\in\mathbb{R}$
Να εξεταστεί αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $\chi=2017$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για $\chi=2017$ έχουμε $f^3(2017)+2016\cdot f(2017)+2017=2017 \Leftrightarrow$ ....

$\Leftrightarrow f(2017)=$.........

Προσπαθούμε να εγκλωβίσουμε τη συνάρτηση f ανάμεσα σε δύο συναρτήσεις με κοινό όριο

Για κάθε $\chi\in\mathbb{R}$ έχουμε $f^3(\chi)+2016\cdot f(\chi)+2017=\chi \Leftrightarrow$ ....

.... $\Leftrightarrow f(\chi)=\dfrac{\chi-2017}{f^2(\chi)+2016}$

Όμως $|f(\chi)|=\left|\dfrac{\chi-2017}{f^2(\chi)+2016}\right|\le$.......................... γιατί .... , $\chi\in\mathbb{R}$

άρα ....$\le f(\chi)\le$..................

και αφού $\lim\limits_{x\to 2017}$........................ $=\lim\limits_{x\to 2017}$...................... $=$........ τότε και $\lim\limits_{x\to 2017} f(\chi)=$..........

Επειδή $\lim\limits_{x\to 2017} f(\chi)=f(2017)=$........... τότε η f είναι συνεχής στο $\chi=2017$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \le g(x) \text{ , x κοντά στο } x_0 \\ \lim\limits_{x \to x_0} f(\chi) = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} g(\chi) = +\infty$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$\lim\limits_{x \to x_0} f(\chi) = +\infty$ οπότε $f(\chi) > 0$ κοντά στο χ_0 άρα $0 < f(\chi) \le g(\chi)$ κοντά στο χ_0

οπότε και $0 < \dfrac{1}{g(\chi)} \le \dfrac{1}{f(\chi)}$ και αφού $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(\chi)} = 0$

τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{g(\chi)} = 0$ και επειδή $g(\chi) > 0$ κοντά στο χ_0 τότε $\lim\limits_{x \to x_0} g(\chi) = +\infty$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \le g(x) \text{ , x κοντά στο } x_0 \\ \lim\limits_{x \to x_0} g(\chi) = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(\chi) = -\infty$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$\lim\limits_{x \to x_0} g(\chi) = -\infty$ οπότε $g(\chi) < 0$ κοντά στο χ_0 άρα $f(\chi) \le g(\chi) < 0$ κοντά στο χ_0

οπότε και $\dfrac{1}{g(\chi)} \le \dfrac{1}{f(\chi)} < 0$ και αφού $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{g(\chi)} = 0$

τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(\chi)} = 0$ και επειδή $f(\chi) < 0$ κοντά στο χ_0 τότε $\lim\limits_{x \to x_0} f(\chi) = -\infty$

ΑΣΚΗΣΗ 7

Δίνεται συνάρτηση $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(\chi) > 0$, ενώ ισχύουν

$\chi \cdot f(\chi) > 1$, $\chi \in (0,1)$ και $\chi \cdot f(\chi) < 1$, $\chi \in (1,+\infty)$

Να εξετάσετε αν στα άκρα του $D_f = (0,+\infty)$ η συνάρτηση συγκλίνει;

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Επειδή για κάθε $\chi \in (0,1)$ ισχύει $\chi \cdot f(\chi) > 1 \Leftrightarrow f(\chi) >$ .... και .... $< \dfrac{1}{f(\chi)} <$ ....

και αφού $\lim\limits_{x \to 0^+}$ .... = ... τότε και $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{f(\chi)}$ = ... οπότε με $f(\chi) > 0$

είναι $\lim\limits_{x \to 0^+} f(\chi)$ = ...

(Η ευθεία χ = ... λέγεται .... ασύμπτωτη της C_f)

Ομοίως για κάθε $\chi \in (1,+\infty)$ ισχύει $\chi \cdot f(\chi) < 1 \Leftrightarrow f(\chi) <$ .... και .... $< f(\chi) <$ ....

και αφού $\lim\limits_{\chi \to +\infty}$ .... = ... τότε και $\lim\limits_{\chi \to +\infty} f(\chi)$ = ...

(Η ευθεία ψ = ... λέγεται .... ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$)

Να κατασκευάσετε 5 ερωτήσεις Σωστού - Λάθους

1/ $\lim_{x \to 2} f(x) = -1 \Rightarrow f(x) < 0$ **,** x κοντά στο $x_0 = -1$ **Σ** **Λ**

2/

3/

4/

5/