



# ΕΛΛΗΝΟΓΑΛΛΙΚΗ ΣΧΟΛΗ ΚΑΛΑΜΑΡΙ

ΓΡΑΠΤΗ ΔΟΚΙΜΑΣΙΑ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ  
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 4 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2016

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:.....

## ΘΕΜΑ Α

**A1.** Έστω το πολυώνυμο  $P(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

Να αποδείξετε ότι  $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$

**Μονάδες 10**

**A2.** Πότε μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $A$  θα λέμε ότι παρουσιάζει στο  $x_0 \in A$  ελάχιστο το  $f(x_0)$ ;

**Μονάδες 5**

**A3.** Να εξετάσετε ποιοι από τους παρακάτω ισχυρισμούς είναι σωστοί (Σ) και ποιοι λανθασμένοι (Λ).

**α.** Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f$  και  $-f$  είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα  $x'$ .

**β.** Αν οι συναρτήσεις  $f$  και  $g$  έχουν πεδία ορισμού  $A$  και  $B$  αντίστοιχα, τότε το πεδίο ορισμού της

συνάρτησης  $\frac{f}{g}$  είναι το  $A \cap B$ .

**γ.**  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = \ell$

**δ.** Για να αναζητήσουμε το όριο μιας συνάρτησης  $f$  στο  $x_0$ , πρέπει το  $x_0$  να ανήκει στο πεδίο ορισμού της  $f$ .

**ε.** Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  έχουν όριο στο  $x_0$  και ισχύει  $f(x) \leq g(x)$  κοντά στο  $x_0$ , τότε

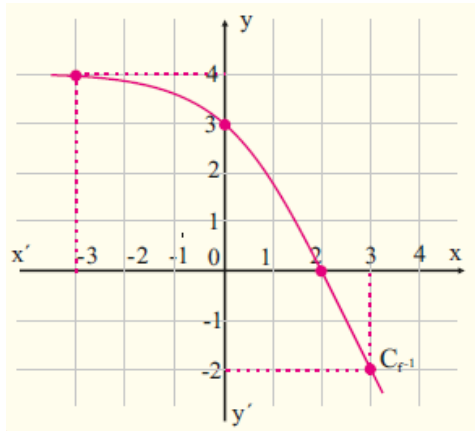
$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ .

**Μονάδες 10**

## ΘΕΜΑ Β

Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με

$f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$



**B1.** Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:  $A = 2f(0) - f^{-1}(0) - 3f^{-1}(2) + f(4)$

**Μονάδες 6**

**B2.** Να λύσετε την εξίσωση  $f(f^{-1}(|x| - 1) + 3) = 0$

**Μονάδες 6**

**B3.** Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f^{-1}(0) \cdot \sqrt{x+3} - f(-2)}{x - f^{-1}(3)}$

**Μονάδες 6**

**B4.** Να υπολογίσετε τις τιμές των  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  ώστε  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^{-1}(3)x^2 - \alpha x + \beta + f^{-1}(-3)}{x - 2} = -5$

**Μονάδες 7**

### ΘΕΜΑ Γ

Έστω συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  περιττή, για την οποία ισχύει  $f^3(x) + 2f(x) - 3x = 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ .

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .

**Μονάδες 6**

**Γ2.** Να υπολογίσετε τους  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  για τους οποίους ισχύει  $f(\alpha^2 + \beta^2) + f(4\alpha - 6\beta + 13) = 0$

**Μονάδες 7**

**Γ3.** Να υπολογίσετε, αν υπάρχει, το  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(x)}{f^3(x) + 2f(x)}$

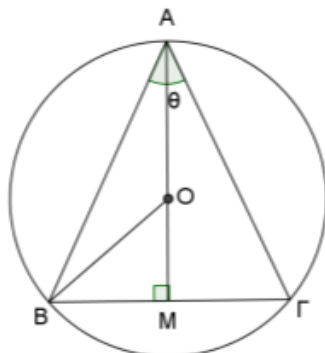
**Μονάδες 6**

**Γ4.** Να υπολογίσετε, αν υπάρχει, το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(x) \cdot \eta\mu \frac{1}{f^{-1}(x)}$

**Μονάδες 6**

**ΘΕΜΑ Δ**

Ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB=AG$ ) είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο  $O$  και ακτίνα  $1$ . Έστω  $\theta$  η γωνία  $\widehat{BAG}$  και  $AM$  το ύψος, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



**Δ1.** Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς  $AB$  συναρτήσει της γωνίας  $\theta$ .

**Μονάδες 7**

**Δ2.** Να υπολογίσετε, αν υπάρχει, το όριο:

**α.**  $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{AB - \sqrt{2}}{OM}$

**β.**  $\lim_{\theta \rightarrow \pi} \frac{OM}{BM}$

**Μονάδες 6**

**Δ3.** Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$  είναι  $E(\theta) = \eta\mu\theta \cdot (1 + \sigma\upsilon\nu\theta)$ .

**Μονάδες 6**

**Δ4.** Να υπολογίσετε το  $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\sigma\upsilon\nu\theta - 1}{E(\theta)}$  όπου  $E(\theta)$  το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

**Μονάδες 6**