

**ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ Γ' ΤΑΞΗΣ  
ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΕΛΛΗΝΟΓΑΛΛΙΚΗΣ ΣΧΟΛΗΣ ΚΑΛΑΜΑΡΙ  
ΤΕΤΑΡΤΗ 25 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2017  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ  
ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ-ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΕΞΙ (6)**

Εισηγητής: Σαράφης Γιάννης

ΘΕΜΑ Α

**A1.** Να αποδείξετε ότι:

Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο  $x_0$ , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

**Μονάδες 7**

**A2.** Πότε μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα  $[α,β]$  του πεδίου ορισμού της;

**Μονάδες 3**

**A3.** Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το θεώρημα Bolzano.

**Μονάδες 5**

**A4.** Στις παρακάτω διαδικασίες και τις γραφικές παραστάσεις υπάρχει κάποιο λάθος. Να βρείτε το λάθος, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

**α.** Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{x - 1}$ .

Απάντηση

$$\text{Επειδή } \lim_{x \rightarrow 1} x^2 = 1, \text{ έχουμε } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x}{x - 1} = - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x - 1} = -1$$

**Μονάδες 2**

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

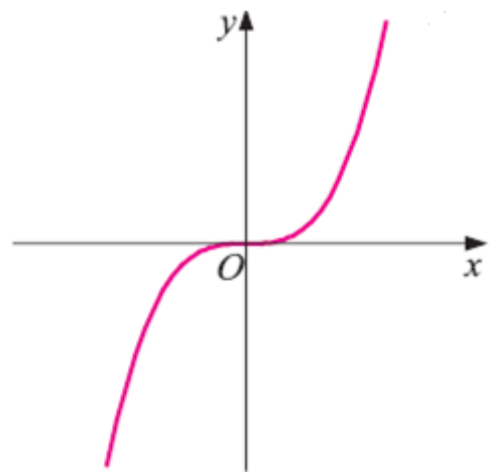
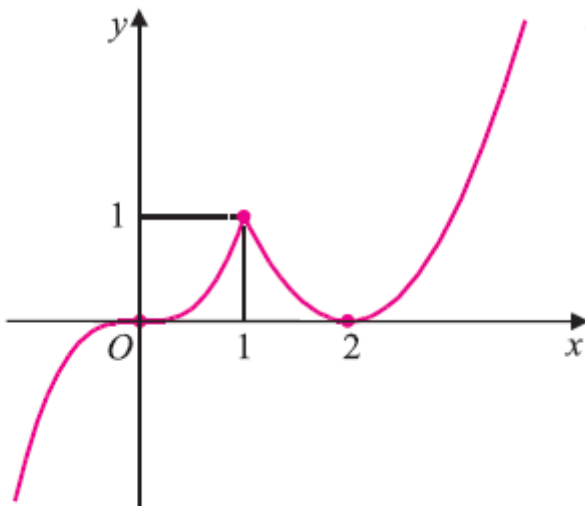
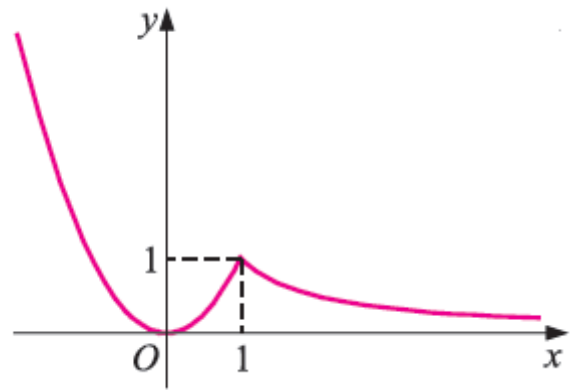
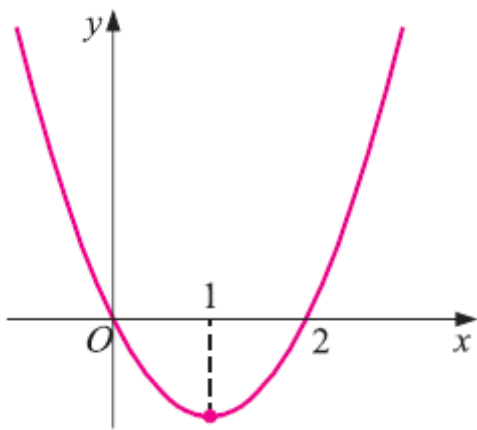
β. Δύο συναρτήσεις  $f, g$  όταν δεν έχουν όριο στο  $x_0$  τότε και το άθροισμά τους δεν

έχει όριο στο  $x_0$  όπως για τις συναρτήσεις  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $x \in \mathbb{R}^*$  και

$$g(x) = x - \frac{1}{x}, \quad x \in \mathbb{R}^*.$$

**Μονάδες 2**

γ. Όλες οι συναρτήσεις που αντιστοιχούν στις παρακάτω γραφικές παραστάσεις είναι παραγωγίσιμες στα πεδία ορισμού της.

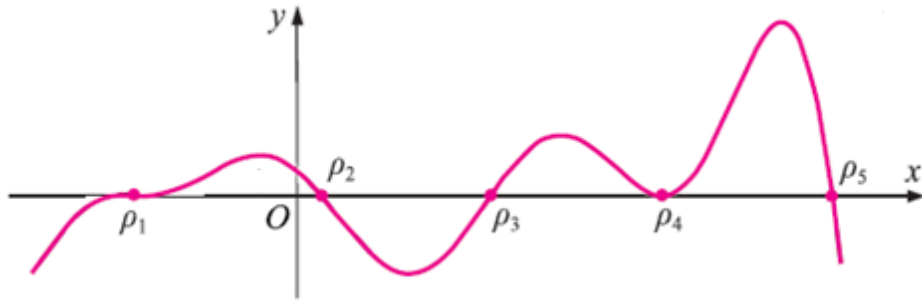


**Μονάδες 2**

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

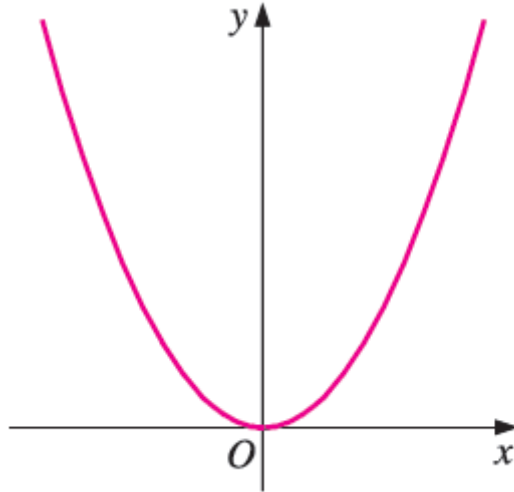
ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

δ. Η συνάρτηση που αντιστοιχεί στην παρακάτω γραφική παράσταση διατηρεί σταθερό πρόσημο στα διαστήματα  $(\rho_1, \rho_2)$ ,  $(\rho_2, \rho_4)$ ,  $(\rho_4, \rho_5]$



**Μονάδες 2**

ε. Η συνάρτηση που αντιστοιχεί στην παρακάτω γραφική παράσταση είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της το  $\mathbb{R}$



**Μονάδες 2**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 1 & , x < 0 \\ \ln(x+1) & , x \geq 0 \end{cases}$ .

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

**B1.** Να μελετήσετε τη μονοτονία της συνάρτησης  $f$ .

**Μονάδες 5**

**B2.** Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ .  
(Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό)

**Μονάδες 5**

**B3.** Να αποδείξετε ότι η αντίστροφη συνάρτηση της  $f$  έχει τύπο

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} -\sqrt{-x-1} & , x < -1 \\ e^x - 1 & , x \geq 0 \end{cases}$$

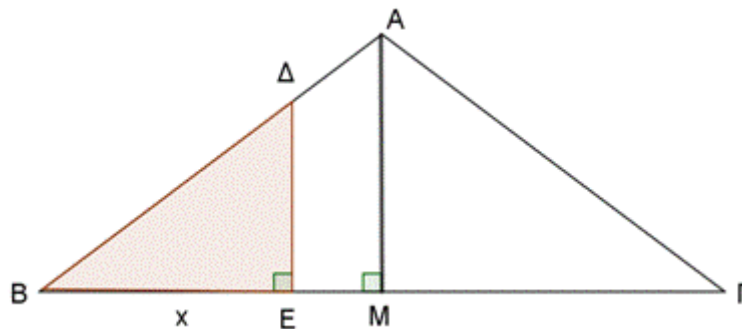
**Μονάδες 8**

**B4.** Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f^{-1}(x)}{f(x)}$

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB=AG=5$  και  $B\Gamma=8$ . Το σημείο  $E$  διαγράφει το ευθύγραμμο τμήμα  $B\Gamma$  με  $\Delta E \perp B\Gamma$  όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



**Γ1.** Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου που δημιουργείται από το ευθύγραμμο τμήμα  $\Delta E$  και τις πλευρές του τριγώνου  $AB\Gamma$  ως συνάρτηση του

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 5ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

$$x=BE \text{ είναι } E(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}x^2 & , 0 < x < 4 \\ 12 - \frac{3}{8}(8-x)^2 & , 4 \leq x < 8 \end{cases}$$

**Μονάδες 9**

**Γ2.** Να υπολογίσετε την  $E'(x)$  όπου ορίζεται.

**Μονάδες 5**

**Γ3.** Να αποδείξετε ότι η ευθεία  $y = 3x - 6$  είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $E(x)$ .

**Μονάδες 6**

**Γ4.** Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{E'(x) - \ln x}{x^2 - x}$

**Μονάδες 5**

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f, g$  με  $g(x) = \sqrt{1-x^2}$ .

**Δ1.** Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις  $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$  που ικανοποιούν τη

σχέση  $(g \circ f)(x) = |\sin x|$  για κάθε  $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**Μονάδες 9**

**Δ2.** Αν  $f(x) = \eta \mu x$ ,  $x \geq 0$ . Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{f(x) + \eta \mu \alpha + \alpha}{x} = -\frac{\alpha - f(x)}{x - \pi} \text{ με } \alpha > 0 \text{ έχει τουλάχιστον μια λύση στο } (0, \pi).$$

**Μονάδες 5**

ΤΕΛΟΣ 5ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 6ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

**Δ3.** Αν ισχύει  $(g \circ f)(x) = |\sin x|$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , να υπολογίσετε το

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(g \circ f)(x) - x}{\eta\mu x + 2}$$

**Μονάδες 4**

**Δ4.α)** Να βρείτε τον τύπο της απόστασης  $d(x)$  του σημείο  $M(x, g(x))$  από την εξίσωση της ευθείας  $x+y+2=0$  για κάθε  $x \in [-1, 1]$ .

**Μονάδες 4**

**β)** Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, σημείο της γραφικής παράστασης της  $g$  που απέχει λιγότερο από ότι απέχουν τα υπόλοιπα σημεία από την ευθεία και ένα, τουλάχιστον, σημείο της γραφικής παράστασης της  $g$  που απέχει περισσότερο από ότι απέχουν τα υπόλοιπα σημεία από την ευθεία

**Μονάδες 3**