Χατζημανώλης Νίκος
Μαθηματικός,
M. Ed. Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών

Σημειώσεις Πολυωνύμων Β΄ Λυκείου

ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ 2015 (Α΄ ΕΚΔΟΣΗ)

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Με τις σημειώσεις αυτές προσπαθώ να αποτυπώσω τη δική μου διδακτική προσέγγιση πάνω στα πολυώνυμα. Επίσης προσπάθησα να παρουσιάσω όσο το δυνατόν πιο απλά τις αποδείξεις των βασικότερων προτάσεων (βλέπε κυρίως ενότητα 2) που χρησιμοποιούμε στη θεωρία πολυωνύμων και που δυστυχώς λείπουν στις μέρες μας από τη φροντιστηριακή βιβλιογραφία. Υπάρχουν ωστόσο και αποδείξεις που είναι δύσκολες ή που χρησιμοποιούν την τεχνική της μαθηματικής επαγωγής η οποία είναι άγνωστη στους μαθητές. Για να μην χαλάσω τη ροή του κειμένου αποφάσισα λοιπόν ότι αυτές έπρεπε να παρουσιαστούν σε ξεχωριστή ενότητα (παράρτημα 2). Κύριο μέλημά μου ήταν επίσης να παρουσιάσω λυμένα παραδείγματα που να καλύπτουν ένα σημαντικό μέρος της σχολικής και φροντιστηριακής ασκησιολογίας. Στην πέμπτη ενότητα θέλησα να παρουσιάσω μερικές χρήσιμες προτάσεις που ωστόσο υπερβαίνουν το πνεύμα της σχολικής ύλης. Αυτή η ενότητα απευθύνεται στον απαιτητικό αναγνώστη. Στο παράρτημα 1 επίσης προσπάθησα να αναφέρω βασικά στοιχεία του συνόλου (δακτυλίου) των πολυωνύμων. Αποφάσισα σε κάποια σημεία να διαφοροποιηθώ από τις υπεραπλουστεύσεις του σχολικού βιβλίου και κυρίως στην έννοια της «μεταβλητής» x. Το x όπως παρουσιάζεται στις σημειώσεις και κυρίως στο παράρτημα 1, και όπως εύκολα θα αντιληφθεί ένας καθηγητής μαθηματικών, θεωρείται μια ξεχωριστή οντότητα στο Δακτύλιο των πολυωνύμων, ότι περίπου είναι και η φανταστική μονάδα στο σύνολο των μιγαδικών. Φυσικά ένας μαθητής μπορεί να αγνοήσει όλα τα δύσκολα θεωρητικά σημεία και να επικεντρωθεί μόνο στην ανάγνωση των βασικών προτάσεων και στη μεθοδολογία των παραδειγμάτων. Κάθε καλόπιστη κριτική είναι ευπρόσδεκτη.

Ο συγγραφέας

Νίκος Χατζημανώλης

Email: nikoschatzimanolis@gmail.com

Αφιερώνεται στη μνήμη του Αλκιβιάδη Λεβέτα, ενός μεγάλου δασκάλου της Φυσικής και των Μαθηματικών.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

ΕΝΟΤΗΤΑ 1^η: Εισαγωγή στην έννοια του πολυωνύμου

1) Εισαγωγικά

Έστω x μια **μεταβλητή**[1] την οποία στη θέση της, υπό προϋποθέσεις, μπορούμε να αντικαθιστούμε έναν οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό, εκτός από τον αριθμό μηδέν στην περίπτωση της παράστασης x^0. Σε αυτή την περίπτωση θέτουμε πρώτα $x^0=1$ και μετά κάνουμε αντικατάσταση. Ας δούμε τις παρακάτω εφαρμογές:

Εφαρμογή 1: Έστω η παράσταση x^5+6x-8. Αν αντικαταστήσουμε στη θέση του x τον αριθμό 1, τότε προκύπτει: $1^5+6\cdot 1-8=1+6-8=-1$.

Εφαρμογή 2: Έστω η παράσταση $x^3+6x^2-7x^0+1$. Για να αντικαταστήσουμε στη θέση του x τον αριθμό μηδέν, τότε πρέπει πρώτα να θέσουμε $x^0=1$. Δηλαδή: $x^3+6x^2-7x^0+1= x^3+6x^2-7\cdot 1+1= x^3+6x^2-6$. Άρα αντικαθιστώντας όπου x τον αριθμό μηδέν, τότε έχουμε $0^3+6\cdot 0^2-6=-6$.

2) Ορισμοί Μονωνύμου–Πολυωνύμου ως προς x

Ορισμός: Οι παραστάσεις της μορφής $\alpha\cdot x^\nu$, όπου $\alpha\in\mathbb{R}$ και $\nu\in\mathbb{N}$, λέγονται **μονώνυμα** του x.

Για παράδειγμα, οι παραστάσεις $-7x^3$, $5x^{12}$, $4=4x^0$ είναι όλες μονώνυμα του x.

Ορισμός: Οι παραστάσεις της μορφής $\alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2x^2+\ldots+\alpha_\nu x^\nu$, όπου α_0, α_1, α_2,…, $\alpha_\nu\in\mathbb{R}$ και $\nu\in\mathbb{N}$, λέγονται **πολυώνυμα** του x.

[1] Το x στην πραγματικότητα δεν είναι πραγματικός αριθμός, αλλά στοιχείο ενός υπερσυνόλου του **IR**. Ως εκ τούτου ο όρος «μεταβλητή» είναι παραπλανητικός και δεν έχει την έννοια της μεταβλητής όπως συμβαίνει στις συναρτήσεις. Ωστόσο αυτός ό όρος έχει επικρατήσει στη βιβλιογραφία. Για αυτό είναι σωστό να λέμε για παράδειγμα ότι «αντικαθιστούμε» το x με τον αριθμό 5 και όχι να λέμε «για x=5». Ωστόσο, για συντομία παρακάτω θα γράφουμε π.χ. «για x=5» υποδηλώνοντας την αντικατάσταση και όχι την ισότητα. Για περισσότερες πληροφορίες που αφορούν τη φύση της «μεταβλητής» x, βλ. στο παράρτημα 1.

Για παράδειγμα οι παραστάσεις $P(x)=5+2x-4x^2+7x$ και $Q(x)=4x^2+5x-1$ είναι πολυώνυμα του x. Όπως βλέπουμε από τα παραπάνω παραδείγματα, τα πολυώνυμα συμβολίζονται με P(x), Q(x), A(x) κ.τ.λ.

Στο πολυώνυμο $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0$, οι αριθμοί α_ν, $\alpha_{\nu-1}$,…,α_1 και α_0 λέγονται **συντελεστές** του πολυωνύμου. Οι παραστάσεις $\alpha_\nu x^\nu$, $\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}$,…,$\alpha_1 x$ και α_0 λέγονται **όροι** του πολυωνύμου. Ειδικά ο όρος α_0 λέγεται **σταθερός όρος** του πολυωνύμου.

Για παράδειγμα, το πολυώνυμο $P(x)=7x^8-4x^2+2x+5$ έχει συντελεστές τους αριθμούς 5, 2, –4, 7 και οι όροι του είναι οι $7x^8$, $-4x^2$, 2x και 5.

Το πολυώνυμο $Q(x)=x^5-x^2+2$ μπορεί να γραφτεί και ως $Q(x)=2-x^2+x^5$. Στην πρώτη περίπτωση λέμε ότι είναι γραμμένο κατά <u>τις φθίνουσες δυνάμεις του x</u>, διότι σε κάθε όρο ο εκθέτης του x είναι μεγαλύτερος του εκθέτη του x στον αμέσως επόμενο όρο. Στη δεύτερη περίπτωση λέμε ότι το Q(x) είναι γραμμένο <u>κατά τις αύξουσες δυνάμεις του x</u>.

Αν κάποιος όρος έχει μηδενικό συντελεστή, τότε ο όρος αυτός λέγεται **μηδενικός όρος**. Για παράδειγμα στο πολυώνυμο $P(x)=x^3+0x^2+1$, ο όρος $0x^2$ είναι μηδενικός.

Σύμφωνα με όσα είπαμε, το πολυώνυμο για παράδειγμα $P(x)=x^2-5x+6$ έχει τρεις όρους. **Στην πραγματικότητα, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι κάθε πολυώνυμο έχει άπειρους όρους και αν τους γράψουμε κατά τις αύξουσες δυνάμεις του x, τότε από ένα σημείο και μετά οι όροι του είναι μηδενικοί**. Μπορούμε να γράψουμε δηλαδή ότι $P(x)=6-5x+x^2+0x^3+0x^4+\ldots$ ή κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του x ότι $P(x)=\ldots+0x^4+0x^3+x^2-5x+6$.

Το γεγονός ότι κάθε πολυώνυμο μπορεί να γραφτεί με άπειρους όρους, μας δίνει την ευκολία να δώσουμε τους παρακάτω ορισμούς.

<u>Ορισμός:</u> **Μηδενικό** λέγεται το πολυώνυμο του οποίου όλοι οι όροι είναι ίσοι με μηδέν, δηλαδή το πολυώνυμο $0+0x+0x^2+0x^3+\ldots$. Επειδή $0+0x+0x^2+0x^3+\ldots=0$, το μηδενικό πολυώνυμο γράφεται και πιο απλά ως 0. Επίσης συμβολίζεται με **0(x)**, δηλαδή 0(x)=0.

<u>Ορισμός:</u> Το πολυώνυμο $P(x)=\alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2x^2+\alpha_3x^3+\ldots$ με $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\ldots=0$ λέγεται **σταθερό πολυώνυμο**.

Το πολυώνυμο $Q(x)=5+0x+0x^2+\ldots$ ή πιο απλά $Q(x)=5$ είναι σταθερό. Επίσης και το μηδενικό πολυώνυμο είναι ένα σταθερό πολυώνυμο.

<u>3) Βαθμός Πολυωνύμου</u>

<u>Ορισμός:</u> Βαθμό ενός πολυωνύμου ορίζεται ο μεγαλύτερος εκθέτης του x που εμφανίζεται στους μη μηδενικούς όρους.

Για παράδειγμα στο πολυώνυμο $Q(x)=0x^6+3x^5-8x^2+2$, ο μεγαλύτερος εκθέτης του x που αντιστοιχεί σε μη μηδενικό όρο είναι ο αριθμός 5. Άρα το πολυώνυμο Q(x) έχει βαθμό ίσο με 5.

☞ Έστω το σταθερό μη μηδενικό πολυώνυμο $P(x)=6$. Επειδή $x^0=1$, τότε μπορούμε να γράψουμε $P(x)=6+0x+0x^2+\ldots=6x^0+0x+0x^2+\ldots$ και επομένως συμπεραίνουμε ότι έχει βαθμό μηδέν. Γενικά κάθε <u>μη μηδενικό σταθερό πολυώνυμο έχει βαθμό μηδέν</u>.

☞ Έστω το μηδενικό πολυώνυμο $0(x)=0+0x+0x^2+0x^3+\ldots$ Σύμφωνα με τον προηγούμενο ορισμό δεν μπορούμε να ορίσουμε σε αυτό βαθμό διότι δεν έχει μη μηδενικούς όρους. Άρα στο <u>μηδενικό πολυώνυμο δεν ορίζεται βαθμός</u>.[2]

Το βαθμό ενός πολυωνύμου P(x), όταν ορίζεται, θα τον συμβολίζουμε ως **βαθμ[P(x)]** ή ως **deg[P(x)]**.

<u>4) Ισότητα Πολυωνύμων</u>

<u>Ορισμός:</u> Έστω δύο πολυώνυμα $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_0$ και $Q(x)=\beta_\mu x^\mu+\beta_{\mu-1}x^{\mu-1}+\ldots+\beta_0$ με $\mu\geq\nu$. Τότε λέμε ότι τα δύο πολυώνυμα είναι ίσα, και γράφουμε $P(x)=Q(x)$, αν και μόνο αν $\alpha_0=\beta_0$, $\alpha_1=\beta_1,\ldots,\alpha_\nu=\beta_\nu$ και $\beta_{\nu+1}=\beta_{\nu+2}=\ldots=\beta_\mu=0$.

---

[2] Ωστόσο στην πανεπιστημιακή βιβλιογραφία μπορεί να συναντήσουμε να ορίζεται ως βαθμός του μηδενικού πολυωνύμου το $-\infty$.

Εφαρμογή 3: Τα πολυώνυμα $P(x)=3x^2-5x+1$ και $Q(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$ είναι ίσα αν και μόνο αν $\delta=1$, $\gamma=-5$, $\beta=3$ και $\alpha=0$.

5) Αριθμητική τιμή Πολυωνύμου

Έστω το πολυώνυμο $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_0$. Αν αντικαταστήσουμε το x με ένα πραγματικό αριθμό ρ, τότε ο αριθμός $\alpha_\nu\rho^\nu+\alpha_{\nu-1}\rho^{\nu-1}+\ldots+\alpha_0$ συμβολίζεται με $P(\rho)$ και λέγεται **αριθμητική τιμή του πολυωνύμου για x=ρ**.[3] Αν μάλιστα ισχύει ότι $P(\rho)=0$, τότε ο αριθμός ρ λέγεται **ρίζα του πολυωνύμου**. Για παράδειγμα έστω το πολυώνυμο $P(x)=x^2-5x+6$. Έχουμε $P(1)=1^2-5\cdot1+6=2$ και $P(3)=3^2-5\cdot3+6=9-15+6=0$, δηλαδή ο αριθμός 3 είναι ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$.

6) Πράξεις με πολυώνυμα

Ορίζουμε πρόσθεση και πολλαπλασιασμό μεταξύ δύο η περισσοτέρων πολυωνύμων με τον ίδιο τρόπο που ορίζονται στις αριθμητικές παραστάσεις. Δηλαδή :

Ορισμός: Αν $P(x)=\alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2x^2+\ldots$ και $Q(x)=\beta_0+\beta_1x+\beta_2x^2+\ldots$, τότε ορίζουμε:

- $P(x)+Q(x)=(\alpha_0+\beta_0)+(\alpha_1+\beta_1)x+(\alpha_2+\beta_2)x^2+\ldots$
- $P(x)\cdot Q(x)=\alpha_0\cdot\beta_0+(\alpha_0\beta_1+\alpha_1\beta_0)x+(\alpha_0\beta_2+\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_0)x^2+\ldots$
  όπου ο συντελεστής του x^κ είναι ο $\alpha_0\beta_\kappa+\alpha_1\beta_{\kappa-1}+\alpha_2\beta_{\kappa-1}+\ldots+\alpha_\kappa\beta_0$.

Ο προσεκτικός αναγνώστης θα παρατηρήσει ότι ο περίεργος ορισμός που αναφέρεται στον πολλαπλασιασμό των πολυωνύμων προκύπτει στην πραγματικότητα από την εφαρμογή της επιμεριστικής ιδιότητας.

Εφαρμογή 4: Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x)=3x^5-2x^2+6x-1$, $Q(x)=4x^3+2x^2-7x$ και $Z(x)=-3x^5$. Τότε:

$P(x)+Q(x)=(3x^5-2x^2+6x-1)+(4x^3+2x^2-7x)=3x^5\underline{-2x^2}+6x-1+4x^3\underline{+2x^2}-7x=$

$=3x^5+4x^3-x-1$.

$P(x)-Q(x)=(3x^5-2x^2+6x-1)-(4x^3+2x^2-7x)=3x^5-2x^2+6x-1-4x^3-2x^2+7x=$

[3] Να τονίσουμε για άλλη μια φορά ότι ο συμβολισμός «x=ρ» δεν σημαίνει στην πραγματικότητα ισότητα, διότι το x δεν είναι πραγματικός αριθμός. Σημαίνει αντικατάσταση, δηλαδή στη θέση του x αφαιρούμε το x και τοποθετούμε τον πραγματικό αριθμό ρ.

$3x^5-4x^3+13x-1$.

$P(x)+Z(x)=(3x^5-2x^2+6x-1)+(-3x^5)=3x^5-2x^2+6x-1-3x^5=-2x^2+6x-1$

Αν το άθροισμα δύο μη μηδενικών πολυωνύμων δεν είναι το μηδενικό, τότε ο βαθμός του αθροίσματος είναι μικρότερος (περίπτωση P(x)+Z(x)) ή ίσος (περίπτωση P(x)+Q(x)) με το μέγιστο των βαθμών των δύο πολυωνύμων.

Δηλαδή αν P(x), Q(x) και P(x)+Q(x) διάφορα από το μηδενικό πολυώνυμο, τότε ισχύει ότι:
Βαθμ[P(x)+Q(x]≤max{βαθμ[P(x)], βαθμ[Q(x)]}. (*Ιδιότητα 1*)

Εφαρμογή 5: Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x)=x-1$ και $Q(x)=x^2$. Τότε $P(x)\cdot Q(x)=(x-1)\cdot x^2=x^3-x^2$. Βλέπουμε ότι βαθμ(P(x)·Q(x))=3. Γενικά:

Αν P(x), Q(x) διάφορα από το μηδενικό πολυώνυμο, τότε και P(x)·Q(x) διάφορο από το μηδενικό και μάλιστα ισχύει:
Βαθμ[P(x)·Q(x)]=βαθμ[P(x)]+βαθμ[Q(x)]. (*Ιδιότητα 2*)

Η ιδιότητα 2, για να αποδειχτεί, προϋποθέτει την ισχύ του παρακάτω θεωρήματος :

<u>Θεώρημα 1.1:</u> Ισχύει ότι P(x)·Q(x)=0(x) αν και μόνο αν P(x)=0(x) ή Q(x)=0(x).

Απόδειξη: Έστω τα πολυώνυμα $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_o$ και $P(x)=\beta_\mu x^\mu+\beta_{\mu-1}x^{\beta-1}+\ldots+\beta_o$, ώστε P(x)·Q(x)=0(x). Έστω επιπλέον ότι P(x)≠0(x) και Q(x)≠0(x). Αυτό σημαίνει ότι $\alpha_\nu\neq0$ και $\beta_\mu\neq0$. Τότε θα ισχύει ότι $P(x)\cdot Q(x)=\alpha_\nu\beta_\mu x^{\nu+\mu}+\ldots+\alpha_o\beta_o$ με $\alpha_\nu\beta_\mu\neq0$, δηλαδή P(x)·Q(x)≠0(x), άτοπο από υπόθεση. Άρα θα ισχύει P(x)=0(x) ή Q(x)=0(x).■

<u>7) Γιατί διδασκόμαστε πολυώνυμα;</u>

Τα πολυώνυμα αποτελούν βασικό κορμό της άλγεβρας με εφαρμογές στη θεωρία αριθμών, τη γεωμετρία και την ανάλυση. Ήδη από το 2000 π.Χ. οι αρχαίοι βαβυλώνιοι ήξεραν να λύνουν πολυωνυμικές εξισώσεις πρώτου και δευτέρου βαθμού κυρίως για πρακτικούς λόγους. Το γεγονός ότι δεν μπορούμε να σχεδιάσουμε χρησιμοποιώντας μόνο κανόνα και διαβήτη ένα τετράγωνο που να έχει το ίδιο εμβαδόν με ένα δεδομένο κύκλο (πρόβλημα τετραγωνισμού του κύκλου) το γνωρίζουμε μέσω της θεωρίας πολυωνύμων. Με τη βοήθεια της θεωρίας πολυωνύμων αποδεικνύεται επίσης ότι τα μόνα κανονικά πολύγωνα με ν πλευρές που είναι κατασκευάσιμα με κανόνα και διαβήτη είναι αυτά για τα οποία ισχύει ότι $\nu=2^r\cdot p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_s$, όπου r φυσικός αριθμός και $p_1,p_2,\ldots,p_s$ διαφορετικοί πρώτοι αριθμοί για τους οποίους με τη σειρά τους ισχύει ότι $p_i=2^{2^{r_i}}+1$ όπου r_i φυσικοί αριθμοί (Θεώρημα Gauss). Μια κλασική εφαρμογή στο χώρο της ανάλυσης είναι ότι τα πολυώνυμα μπορούν υπό προϋποθέσεις να προσεγγίσουν άλλες συναρτήσεις. Για παράδειγμα μια καλή προσέγγιση της συνάρτησης y=συνx για $0\le x\le 4$ είναι η πολυωνυμική συνάρτηση με τύπο:

$g(x)=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4-\frac{1}{720}x^6+\frac{1}{40329}x^8-\frac{1}{3628800}x^{10}$.[4] Ο παρακάτω πίνακας δίνει τις τιμές του πολυωνύμου g(x) και τις τιμές της συνάρτησης y=συνx, με προσέγγιση 9 δεκαδικών ψηφίων (το x εκφράζει τη γωνία σε rad):

x=	g(x)	y=συνx
1	0,540302304	0,540302306
2	-0,416155203	-0,416146837
3	-0,991049107	-0,989992497
4	-0,685784832	-0,653643621

<u>8) Παραδείγματα</u>

Παράδειγμα 1: Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$, το πολυώνυμο $P(x)=(\lambda^3-\lambda+\lambda^2-1)x^3+(\lambda+1)(3\lambda^2-\lambda-2)x^2+\lambda^2-1$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

Λύση: Το P(x) είναι το μηδενικό πολυώνυμο αν και μόνο αν όλοι οι συντελεστές του είναι ίσοι με το μηδέν, δηλαδή αν και μόνο αν ισχύει:

[4] Φυσικά μπορούμε να βρούμε και καλύτερη πολυωνυμική προσέγγιση της συνάρτησης y=συνx.

$\lambda^3-\lambda+\lambda^2-1=0$ (1) και $(\lambda+1)(3\lambda^2-\lambda-2)=0$ (2) και $\lambda^2-1=0$ (3). Επειδή (3)$\Leftrightarrow(\lambda+1)(\lambda-1)=0\Leftrightarrow\lambda=1$ ή $\lambda=-1$, θα εξετάσουμε αν για αυτές τις τιμές επαληθεύονται και οι άλλες εξισώσεις.

- Για $\lambda=1$: (1)$\Leftrightarrow$ $1^3-1+1^2-1=0\Leftrightarrow 0=0$ ισχύει και (2)$\Leftrightarrow$ $(1+1)(3\cdot 1^2-1-2)=0\Leftrightarrow 2\cdot 0=0$ ισχύει. Άρα για $\lambda=1$ ισχύει $P(x)=0(x)$.
- Για $\lambda=-1$: (1)$\Leftrightarrow$ $(-1)^3-(-1)+(-1)^2-1=0\Leftrightarrow 0=0$ ισχύει και (2)$\Leftrightarrow$ $(-1+1)\cdot[3\cdot(-1)^2-(-1)-2]=0\Leftrightarrow 0\cdot 2=0$ ισχύει. Άρα για $\lambda=-1$ ισχύει επίσης ότι $P(x)=0(x)$.

Παράδειγμα 2: Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x)=\kappa x^3+(2\lambda-3\mu)x^2+(\lambda+2\mu)x+4$ και $Q(x)=8x^2-3x+4$ όπου κ, λ, $\mu\in\mathbf{IR}$. Να βρείτε τις τιμές των αριθμών κ, λ και μ, ώστε $P(x)=Q(x)$.

Λύση: Για να είναι ίσα τα πολυώνυμα θα πρέπει οι συντελεστές των ομοβαθμίων όρων να είναι ίσοι, δηλαδή πρέπει $\kappa=0$, $2\lambda-3\mu=8$ και $\lambda+2\mu=-3$. Από το σύστημα των δύο τελευταίων εξισώσεων προκύπτει ότι $\lambda=1$ και $\mu=-2$.

Παράδειγμα 3: Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=(\alpha+\beta)x^3+(\alpha-2\beta)x^2+2x-3$ όπου $\alpha,\beta\in\mathbf{IR}$. Να βρείτε τις τιμές των α και β, ώστε $P(1)=1$ και $P(2)=-1$.

Λύση: $P(1)=1\Leftrightarrow (\alpha+\beta)\cdot 1^3+(\alpha-2\beta)\cdot 1^2+2\cdot 1-3=1\Leftrightarrow 2\alpha-\beta=2$ και $P(2)=-1\Leftrightarrow$ $(\alpha+\beta)\cdot 2^3+(\alpha-2\beta)\cdot 2^2+2\cdot 2-3=-1\Leftrightarrow 12\alpha=-2\Leftrightarrow \alpha=-1/6$. Άρα $\beta=2\alpha-2=-1/3-2=-7/3$.

Παράδειγμα 4: Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=(1-\lambda^2)x^3+(\lambda-1)x^2+(\lambda-1)$, $\lambda\in\mathbf{IR}$. Να βρείτε το βαθμό του P(x) για τις διάφορες τιμές του λ.

Λύση: Εξετάζουμε τις ρίζες του μεγιστοβαθμίου όρου: $1-\lambda^2=0\Leftrightarrow\lambda^2=1\Leftrightarrow\lambda=1$ ή $\lambda=-1$.

- Αν $\lambda\neq 1$ και $\lambda\neq -1$, τότε το πολυώνυμο είναι $3^{ου}$ βαθμού.
- Αν $\lambda=1$, τότε οι υπόλοιποι συντελεστές παίρνουν την τιμή $\lambda-1=1-1=0$. Σε αυτή την περίπτωση το πολυώνυμο $P(x)=0(x)$ και άρα δεν έχει βαθμό.
- Αν $\lambda=-1$, τότε οι υπόλοιποι συντελεστές παίρνουν την τιμή $\lambda-1=-1-1=-2$. Τότε $P(x)=-2x^2-2$ και άρα $\text{βαθμ}[P(x)]=2$.

Παράδειγμα 5: Να βρείτε πολυώνυμο P(x), ώστε να ισχύει $(2x+3)\cdot P(x)=2x^3-7x^2-3x+18$.

Λύση: Επειδή βαθμ$[2x+3]=1$ και βαθμ$[2x^3-7x^2-3x+18]=3$, έπεται από την ιδιότητα 2 ότι βαθμ$[P(x)]=2$. Άρα $P(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ με $\alpha\neq 0$. Τότε $(2x+3)\cdot P(x)= (2x+3)\cdot(\alpha x^2+\beta x+\gamma)=2\alpha x^3+(2\beta+3\alpha)x^3+(2\gamma+3\beta)x+3\gamma$.

Άρα $2\alpha x^3+(2\beta+3\alpha)x^3+(2\gamma+3\beta)x+3\gamma=2x^3-7x^2-3x+18 \Leftrightarrow 3\gamma=18$ (1), $2\gamma+3\beta=-3$ (2), $2\beta+3\alpha= -7$ (3) και $2\alpha=2$ (4).

Έχουμε (4)$\Rightarrow\alpha=1$, (1)$\Rightarrow \gamma=6$. Για $\gamma=6$ η (2) δίνει $\beta= -5$ και για $\alpha=1$ η (3) δίνει επίσης $\beta= -5$. Άρα $P(x)= x^2-5x+6$.

Παράδειγμα 6: Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=\alpha_0+\alpha_1 x +\alpha_2 x^2+\alpha_3 x^3+\ldots$

Τότε το άθροισμα των συντελεστών των άρτιων δυνάμεων του x είναι ίσο με $\alpha_0+\alpha_2+\alpha_4+\ldots=\dfrac{P(1)+P(-1)}{2}$, ενώ το άθροισμα των συντελεστών των περιττών δυνάμεων του x είναι ίσο με $\alpha_1+\alpha_3+\alpha_5+\ldots=\dfrac{P(1)-P(-1)}{2}$.

Λύση:

Είναι $P(1)=\alpha_0+\alpha_1\cdot 1+\alpha_2\cdot 1^2+\alpha_3\cdot 1^3+\ldots=\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots$

και

$P(-1)=\alpha_0+\alpha_1\cdot(-1)+\alpha_2\cdot(-1)^2+\alpha_3\cdot(-1)^3+\ldots=\alpha_0-\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3+\ldots$

Επομένως

$$P(1)+P(-1)=(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots)+(\alpha_0-\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3+\ldots)=$$
$$2(\alpha_0+\alpha_2+\alpha_4+\alpha_6+\ldots)\Rightarrow\frac{P(1)+P(-1)}{2}=\alpha_0+\alpha_2+\alpha_4+\alpha_6+\ldots$$

Όμοια προκύπτει ότι :

$$P(1)-P(-1)=(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots)-(\alpha_0-\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3+\ldots)=$$
$$2(\alpha_1+\alpha_3+\alpha_5+\ldots)$$

και άρα $\dfrac{P(1)-P(-1)}{2}=\alpha_1+\alpha_3+\alpha_5...$

Παράδειγμα 7: Να βρείτε πολυώνυμο P(x) δευτέρου βαθμού, ώστε να ισχύουν οι συνθήκες (i) P(0)=0 και (ii) P(x)–P(x–1)=x. Κατόπιν να αποδείξετε ότι $1+2+3+...+\nu=\dfrac{\nu(\nu+1)}{2}$.

Λύση: Το άθροισμα αποτελεί γνωστή εφαρμογή από τη θεωρία των αριθμητικών προόδων. Εδώ θα δούμε πώς φτάνουμε στο ίδιο αποτέλεσμα με τη βοήθεια της θεωρίας πολυωνύμων, ενώ μετά θα γενικεύσουμε αυτή τη μέθοδο και σε άλλα αθροίσματα. Έστω $P(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$. με $\alpha\neq 0$. Τότε $P(0)=0\Rightarrow\gamma=0$. Άρα $P(x)=\alpha x^2+\beta x$. Ακόμη $P(x-1)=\alpha(x-1)^2+\beta(x-1)$. Τότε

$P(x)-P(x-1)=x\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow 2\alpha x+(\beta-\alpha)=x\Leftrightarrow$ $2\alpha=1$ και $\beta-\alpha=0\Leftrightarrow\alpha=\beta=\dfrac{1}{2}$.

Επομένως $P(x)=\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}x$. Τώρα έχουμε:

$$\left.\begin{array}{r}P(1)-P(0)=1\\ P(2)-P(1)=2\\ P(3)-P(2)=3\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ P(\nu)-P(1)=\nu\end{array}\right\}\overset{(+)}{\Rightarrow}P(\nu)-P(0)=1+2+3+...+\nu.$$

Όμως P(0)=0. Άρα $1+2+3+...+\nu=P(\nu)=\dfrac{1}{2}\nu^2+\dfrac{1}{2}\nu=\dfrac{\nu(\nu+1)}{2}$.

Με παρόμοιο τρόπο υπολογίζουμε οποιοδήποτε άθροισμα της μορφής

$1^{\kappa-1}+2^{\kappa-1}+3^{\kappa-1}+\ldots+\nu^{\kappa-1}$ $\kappa\in\mathbf{IN}$ με $\kappa\geq 2$, προσδιορίζοντας πρώτα το κατάλληλο πολυώνυμο P(x) κ βαθμού για το οποίο ισχύει P(0)=0 και $P(x)-P(x-1)=x^{\kappa-1}$ (βλ. και άσκηση 10 παρακάτω).

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u>

1) Αν $P(x)=4x^3-3x+6$ και $Q(x)=2x^3-x^2+2x-1$, τότε να βρείτε τα πολυώνυμα:

(α) $2P(x)+3Q(x)$ και (β) $P(x)\cdot Q(x)-4\left(2x^5-\frac{3}{2}x^4-\frac{3}{4}\right)$

2) Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x)=2x^2-x+2$ και $Q(x)=x^2+x-1$. Να βρείτε τα πολυώνυμα:

(α) $P(x)+(x-2)Q(x)$, (β) $P(x)\cdot Q(x)+(x^2-1)P(x)$ και

(γ) $[P(x)]^2+Q(x)(x^2+x+1)$.

3) Να βρείτε για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbf{IR}$ το βαθμό του πολυωνύμου

$P(x)=(4\lambda^3-9\lambda)x^3+(4\lambda^2-9)x^2-2\lambda+3$.

4) Να βρείτε για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbf{IR}$ το βαθμό του πολυωνύμου

$P(x)=(\lambda^2-9)x^5+(\lambda-3)x^2+(\lambda+3)x-6$.

5) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda\in\mathbf{IR}$ το πολυώνυμο με τύπο:

$P(x)=(\lambda^2-1)x^4+(\lambda^2+\lambda-2)x^3+(\lambda^4+\lambda-2)x^2+(\lambda^5+3\lambda^2-4)x+\lambda^2-4\lambda+3$ είναι το μηδενικό.

6) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda\in\mathbf{IR}$ το πολυώνυμο με τύπο:

$P(x)=(\lambda+1)x^4+(\lambda^2+3\lambda+2)x^2+\lambda^3+\lambda^2+2\lambda+2$ είναι το μηδενικό.

7) Να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών α, β, γ και δ ώστε τα πολυώνυμα $P(x)=4x^3+(α–4)x^2–(β+1)x+4β$ και $Q(x)=γx^3+5x+δ$ να είναι ίσα.

8) Να βρείτε για ποιες τιμές των πραγματικών αριθμών κ, λ και μ το πολυώνυμο $P(x)=x^4+3x^3+κx^2+λx+3$ είναι ίσο με το τετράγωνο του πολυωνύμου $Q(x)=x^2–x–μ$, δηλαδή να ισχύει $(Q(x))^2=P(x)$.

9) Να βρείτε το πολυώνυμο P(x), για το οποίο ισχύει η ισότητα:

$(x+3)P(x)=2x^3+7x^2+2x–3$.

10) Να αποδείξετε ότι

(α) $1^2+2^2+3^2+...+ν^2=\frac{ν(ν+1)(2ν+1)}{6}$.

(β) $1^3+2^3+3^3+...+ν^3=\frac{ν^2(ν+1)^2}{4}$.

11) Να βρείτε πολυώνυμο P(x) τρίτου βαθμού, ώστε να ισχύουν οι συνθήκες (i) $P(0)=0$ και (ii) $P(x+1)–P(x)=x(x+1)$. Κατόπιν να υπολογίσετε το άθροισμα $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+…+ν(ν+1)$.

12) Να βρείτε πολυώνυμο P(x) τετάρτου βαθμού, ώστε να ισχύουν οι συνθήκες (i) $P(0)=0$ και (ii) $P(x+1)–P(x)=x(x+1)^2$. Κατόπιν να υπολογίσετε το άθροισμα $1\cdot2^2+2\cdot3^2+3\cdot4^2+…+ν(ν+1)^2$.

13) Να βρείτε πολυώνυμο P(x) δευτέρου βαθμού, ώστε να ισχύει η ισότητα $P(P(x))=x^2P(x)-xP(x)+1$.

14) Να βρείτε πολυώνυμα P(x) δευτέρου βαθμού, ώστε να ισχύει η ισότητα $P(x-1)=P(x)$.

15) Να βρείτε όλα τα πολυώνυμα P(x) για τα οποία ισχύει η ισότητα $P(2x)=2P(x)$.

16) Αν ισχύει η σχέση $P(x)+Q(x)=P(x)\cdot Q(x)$, τότε να δείξετε ότι τα πολυώνυμα P(x) και Q(x) είναι σταθερά.

ΕΝΟΤΗΤΑ 2η: Διαίρεση Πολυωνύμων

1) Ταυτότητα της Ευκλείδειας Διαίρεσης για Πολυώνυμα

Ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 2.1(Θεώρημα ευκλείδειας διαίρεσης για πολυώνυμα): Για κάθε ζεύγος πολυωνύμων $Δ(x)$ και $δ(x)$ με $δ(x)\neq 0(x)$ υπάρχουν δύο μοναδικά πολυώνυμα $π(x)$ και $υ(x)$, τέτοια ώστε $Δ(x)=δ(x)\cdot π(x)+υ(x)$, όπου $υ(x)=0(x)$ ή $βαθμ[υ(x)]<βαθμ[δ(x)]$.

Απόδειξη: Βλέπε παράρτημα 2.■

Το $Δ(x)$ ονομάζεται **διαιρετέος** , το $δ(x)$ **διαιρέτης**, το $π(x)$ **πηλίκο** και το $υ(x)$ **υπόλοιπο** της διαίρεσης.

Εφαρμογή 1: Να εκτελέσετε τη διαίρεση $(x^5-3x^3+6x^2-8x+11)$: (x^3-x+6).

Λύση: Για να προσδιορίσουμε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης ακολουθούμε διαδικασία παρόμοια με αυτή της διαίρεσης δύο φυσικών αριθμών:

(α) κάνουμε το σχήμα της διαίρεσης γράφοντας το διαιρετέο $x^5-3x^3+6x^2-8x+11$ στην πλήρη μορφή του

$$\rightarrow \qquad \begin{array}{l|l} x^5+0x^4-3x^3+6x^2-8x+11 & x^3-x+6 \\ \cline{2-2} & \end{array}$$

(β) Βρίσκουμε τον πρώτο όρο x^2 του πηλίκου διαιρώντας τον πρώτο όρο του διαιρετέου με τον πρώτο όρο του διαιρέτη ή αντίστροφα σκεφτόμαστε με τι πρέπει να πολλαπλασιαστεί το x^3, ώστε να γίνει x^5.

$$\rightarrow \qquad \begin{array}{l|l} x^5+0x^4-3x^3+6x^2-8x+11 & x^3-x+6 \\ \cline{2-2} & x^2 \end{array}$$

(γ) Πολλαπλασιάζουμε το x^2 με το x^3-x+6 και το γινόμενο $x^5-5x^3-6x^2$ το αφαιρούμε από το διαιρετέο. Έτσι βρίσκουμε το μερικό υπόλοιπο $2x^3+0x^2-8x+11$

$$\rightarrow \qquad \begin{array}{r|l}
x^5+0x^4-3x^3+6x^2-8x+11 & x^3-x+6 \\ \cline{2-2}
-x^5 \qquad +5x^3-6x^2 \qquad\quad & x^2 \\ \cline{1-1}
2x^3+0x^2-8x+11 &
\end{array}$$

(δ) Επαναλαμβάνουμε τα βήματα (β) και (γ) με νέο διαιρετέο το $2x^3+0x^2-8x+11$. Βρίσκουμε το νέο μερικό υπόλοιπο $2x-1$.

$$\rightarrow \qquad \begin{array}{r|l}
x^5+0x^4-3x^3+6x^2-8x+11 & x^3-x+6 \\ \cline{2-2}
-x^5 \qquad +5x^3-6x^2 \qquad\quad & x^2+2 \\ \cline{1-1}
2x^3+0x^2-8x+11 & \\
-2x^3 \qquad +10x-12 & \\ \cline{1-1}
2x-1 &
\end{array}$$

(ε) Επαναλαμβάνουμε τα βήματα (β) και (γ) έως ότου το μερικό υπόλοιπο γίνει 0 (μηδενικό πολυώνυμο) ή όταν ο βαθμός του μερικού υπολοίπου γίνει μικρότερος από το βαθμό του διαιρέτη. Επειδή στο βήμα (δ) ισχύει βαθμ$[2x-1]<$βαθμ$[x^3-x+6]$, η διαίρεση τελειώνει σε εκείνο ακριβώς το σημείο.

Επομένως το πηλίκο της διαίρεσης είναι το $\pi(x)= x^2+2$ και το υπόλοιπο είναι το $\upsilon(x)= 2x-1$. Από την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης προκύπτει ότι $x^5-3x^3+6x^2-8x+11= (x^3-x+6)\cdot(x^2+2)+ 2x-1$.

Εφαρμογή 2: Να εκτελέσετε τη διαίρεση (x^3+x^2-5x-2): $(x-2)$.

Λύση: Όπως και στην προηγούμενη εφαρμογή ακολουθώντας τα βήματα της διαίρεσης λαμβάνουμε

$$\begin{array}{r|l}
x^3+\ x^2-5x-2 & x-2 \\ \cline{2-2}
-x^3+2x^2 \qquad\qquad & x^2+3x+1 \\ \cline{1-1}
3x^2-5x-2 & \\
-3x^2+6x \quad\ & \\ \cline{1-1}
x-2 & \\
-x+2 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Σε αυτή τη διαίρεση το υπόλοιπο είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

Ορισμός 1: Αν σε μια διαίρεση του $\Delta(x)$ με το $\delta(x)$ το υπόλοιπο $\upsilon(x)=0(x)$, τότε η διαίρεση λέγεται **τέλεια**. Τότε ισχύει η ισότητα $\Delta(x)=\delta(x)\cdot\pi(x)$ και λέμε ότι το $\delta(x)$ **διαιρεί** το $\Delta(x)$ και γράφουμε $\delta(x)\,|\,\Delta(x)$. Λέμε επίσης ότι το $\Delta(x)$ **διαιρείται με το** $\delta(x)$.

Ορισμός 2: Θα λέμε ότι το πολυώνυμο $\delta(x)$ είναι **παράγοντας** ή **διαιρέτης** του $\Delta(x)$ αν υπάρχει πολυώνυμο $\pi(x)$, ώστε να ισχύει $\Delta(x)=\delta(x)\cdot\pi(x)$.

Από την προηγούμενη εφαρμογή, προκύπτει ότι το $x-2$ είναι παράγοντας του x^3+x^2-5x-2, διότι $x^3+x^2-5x-2=(x-2)\cdot(x^2+3x+1)$.

<u>2) Διαίρεση πολυωνύμου με το x–ρ.</u>

<u>Θεώρημα 2.2:</u> Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x-\rho$ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για $x=\rho$, δηλαδή $\upsilon=P(\rho)$.

Απόδειξη: Αφού ο διαιρέτης $\delta(x)=x-\rho$ είναι πρώτου βαθμού τότε σύμφωνα με το θεώρημα 2.1 της ευκλείδειας διαίρεσης για πολυώνυμα, για το υπόλοιπο $\upsilon(x)$ θα ισχύει $\upsilon(x)=0$ ή $\beta\alpha\theta\mu[\upsilon(x)]<\beta\alpha\theta\mu[x-\rho]=1$. Δηλαδή $\upsilon(x)=0$ ή $\beta\alpha\theta\mu[\upsilon(x)]=0$, δηλαδή $\upsilon(x)=c_1$ με $c_1\neq 0$. Σε κάθε περίπτωση λοιπόν ισχύει ότι $\upsilon(x)=c$ (σταθερό πολυώνυμο). Άρα $P(x)=(x-\rho)\cdot\pi(x)+c$. Για $x=\rho$ προκύπτει ότι $P(\rho)=(\rho-\rho)\cdot\pi(\rho)+c=0+c=c$. Άρα $P(x)=(x-\rho)\cdot\pi(x)+P(\rho)$. ■

Είναι λοιπόν χρήσιμο στα επόμενα να θυμόμαστε το παρακάτω σχήμα διαίρεσης:

$$\begin{array}{c|l} P(x) & x-\rho \\ \cline{2-2} \ldots & \pi(x) \\ \upsilon=P(\rho) & \end{array} \quad \rightarrow P(x)=(x-\rho)\cdot\pi(x)+P(\rho)$$

Δηλαδή όπως επαληθεύεται και στην παρακάτω εφαρμογή το υπόλοιπο της διαίρεσης με διαιρέτη ένα πολυώνυμο της μορφής $x-\rho$ είναι πάντα ένας σταθερός αριθμός (σταθερό πολυώνυμο).

Εφαρμογή 3: Να εκτελέσετε τη διαίρεση $(x^3+5x+6):(x-1)$.

Λύση: Εκτελούμε τη διαίρεση και λαμβάνουμε το υπόλοιπο $υ(x)=12$:

$$
\begin{array}{r|l}
x^3+0x^2+5x+6 & x-1 \\ \cline{2-2}
-x^3+\ x^2\qquad\quad & x^2+x+6 \\ \cline{1-1}
x^2+5x+6 & \\
-x^2\ +x\quad\ \, & \\ \cline{1-1}
6x+6 & \\
-6x+6 & \\ \cline{1-1}
12\ \ &
\end{array}
$$

Με τη βοήθεια του προηγούμενου θεωρήματος θα αποδείξουμε το παρακάτω θεώρημα που μας βοηθάει να παραγοντοποιήσουμε ένα πολυώνυμο, όταν γνωρίζουμε μία ρίζα του:

Θεώρημα 2.3: Το πολυώνυμο $x-ρ$ είναι διαιρέτης του πολυωνύμου $P(x)$ αν και μόνο αν το $ρ$ είναι ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$, δηλαδή αν και μόνο αν ισχύει ότι $P(ρ)=0$.

Απόδειξη: Έστω ότι το πολυώνυμο $x-ρ$ είναι διαιρέτης του πολυωνύμου $P(x)$. Τότε σύμφωνα με τον ορισμό 2 αυτής της ενότητας θα υπάρχει πολυώνυμο $π(x)$, ώστε $P(x)=(x-ρ)\cdot π(x)$. Άρα $P(ρ)=(ρ-ρ)\cdot π(ρ)=0$.

Αντίστροφα, έστω ότι $P(ρ)=0$. Τότε σύμφωνα με το θεώρημα 2.1, αν εκτελέσουμε τη διαίρεση του $P(x)$ με το $x-ρ$, θα ισχύει η ισότητα $P(x)=(x-ρ)\cdot π(x)+υ$, με $υ=P(ρ)$. Σύμφωνα με την υπόθεση όμως, ισχύει ότι $P(ρ)=0$, και άρα η προηγούμενη ισότητα γράφεται ως $P(x)=(x-ρ)\cdot π(x)$. Δηλαδή το πολυώνυμο $x-ρ$ είναι διαιρέτης του πολυωνύμου $P(x)$. ■

Εφαρμογή 4: Να εξεταστεί αν τα πολυώνυμα $x-2$ και $x+1$ είναι παράγοντες του πολυωνύμου $P(x)=x^3-2x^2+3x-6$.

Λύση: Σύμφωνα με το θεώρημα 2.3 το πολυώνυμο $x-2$ είναι παράγοντας του $P(x)$ αν και μόνο αν $P(2)=0$. Για $x=2$, έχουμε: $P(2)=2^3-2\cdot 2^2+3\cdot 2-6=8-8+6-6=0$. Άρα το πολυώνυμο $x-2$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

Επειδή $x+1=x-(-1)$, το πολυώνυμο $x+1$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου $P(x)$ αν και μόνο αν $P(-1)=0$. Όμως $P(-1)=(-1)^3-2\cdot(-1)^2+3\cdot(-1)-6= -1-2-3-6= -12\neq 0$. Άρα το πολυώνυμο $x+1$ δεν είναι παράγοντας του πολυωνύμου $P(x)$. Σε αυτή την εφαρμογή θα μπορούσαμε εναλλακτικά να εκτελέσουμε τις διαιρέσεις του $P(x)$ με τα πολυώνυμα $x-2$ και $x-1$ αντίστοιχα και να διαπιστώσουμε ποια πολυώνυμα είναι διαιρέτες και ποια όχι του $P(x)$. Υπάρχουν περιπτώσεις όμως που η διαίρεση απαιτεί μεγάλο πλήθος πράξεων, ενώ η αντικατάσταση όχι.

<u>3) Χρήσιμες προτάσεις που αφορούν τα πολυώνυμα.</u>

Με τη βοήθεια του θεωρήματος 2.3 θα αποδείξουμε μερικά πολύ χρήσιμα πορίσματα που αφορούν τα πολυώνυμα.

<u>Λήμμα 2.4:</u> Έστω $\rho_1, \rho_2\in$ **IR**, με $\rho_1\neq\rho_2$. Τότε ισχύει η ισοδυναμία:
$(x-\rho_1)\cdot(x-\rho_2)\mid P(x) \Leftrightarrow (x-\rho_1)\mid P(x)$ και $(x-\rho_2)\mid P(x)$.

Απόδειξη: Έστω ότι $(x-\rho_1)\cdot(x-\rho_2)\mid P(x)$. Τότε $P(x)=(x-\rho_1)\cdot(x-\rho_2)\cdot Q(x)$. Άρα $P(x)=(x-\rho_1)\cdot Q_1(x)$, όπου $Q_1(x)=(x-\rho_2)\cdot Q(x)$. Άρα $(x-\rho_1)\mid P(x)$. Όμοια $(x-\rho_2)\mid P(x)$.

Αντίστροφα: Έστω $(x-\rho_1)\mid P(x)$ και $(x-\rho_2)\mid P(x)$. Επειδή το $x-\rho_1$ διαιρεί το $P(x)$, έπεται ότι υπάρχει πολυώνυμο $Q(x)$ τέτοιο ώστε $P(x)=(x-\rho_1)\cdot Q(x)$. Όμως $(x-\rho_2)\mid P(x)$ και από το θεώρημα 2.3 έπεται ότι $P(\rho_2)=0$. Άρα $(\rho_2-\rho_1)\cdot Q(\rho_2)=0$ και επειδή $\rho_1\neq\rho_2$, προκύπτει ότι $Q(\rho_2)=0$. Από το θεώρημα 2.3, συνεπάγεται ότι $(x-\rho_2)\mid Q(x) \Rightarrow Q(x)=(x-\rho_2)\cdot Q_1(x)$. Άρα $P(x)=(x-\rho_1)\cdot Q(x)=(x-\rho_1)\cdot(x-\rho_2)\cdot Q_1(x)$ και επομένως $(x-\rho_1)\cdot(x-\rho_2)\mid P(x)$.■

Το παρακάτω λήμμα γενικεύει το λήμμα 2.4

<u>Λήμμα 2.5:</u> Έστω $\rho_1, \rho_2,\ldots,\rho_\nu\in$ **IR**, διαφορετικά ανά δύο μεταξύ τους. Τότε ισχύει η ισοδυναμία:
$(x-\rho_1)\cdot(x-\rho_2)\cdot\ldots\cdot(x-\rho_\nu)\mid P(x) \Leftrightarrow (x-\rho_1)\mid P(x)$ και $(x-\rho_2)\mid P(x)$ και …
$(x-\rho_\nu)\mid P(x)$.

Απόδειξη: Βλέπε παράρτημα 2.■

Ορισμός 3: Έστω $\nu \in \mathbf{IN}$. Θα λέμε ότι το πολυώνυμο P(x) είναι **το πολύ βαθμού ν**, όταν $0 \leq$ βαθμ$[P(x)] \leq \nu$ ή όταν P(x)=0(x).[1]

Θεώρημα 2.6: Έστω ότι το πολυώνυμο P(x) είναι **βαθμού το πολύ ν.** Αν το πολυώνυμο αυτό έχει ν+1 διαφορετικές ρίζες, τότε θα είναι το μηδενικό.

Απόδειξη: Έστω πολυώνυμο P(x) **βαθμού το πολύ ν**. Τότε $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_0$. Έστω $\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_{\nu+1}$ οι διαφορετικές ρίζες του P(x). Τότε σύμφωνα με το θεώρημα 2.3 και το λήμμα 2.5, θα ισχύει $P(x)=(x-\rho_1)\cdot(x-\rho_2)\cdot\ldots(x-\rho_{\nu+1})\cdot Q(x)$. Αν $P(x)\neq 0(x)$, τότε από το θεώρημα 1.1 προκύπτει ότι $Q(x)\neq 0(x)$. Κατά συνέπεια, από την ιδιότητα 2 της πρώτης ενότητας θα έχουμε ότι βαθμ$[P(x)]=$ βαθμ$[x-\rho_1]+$βαθμ$[x-\rho_2]+\ldots+$ βαθμ$[x-\rho_{\nu+1}]+$ βαθμ$[Q(x)]\geq \nu+1$, άτοπο από υπόθεση. Άρα P(x)=0(x). ■ Η άσκηση 17 (α) γενικεύει το προηγούμενο θεώρημα.

Εφαρμογή 5: Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$ όπου α, β, γ, $\delta\in\mathbf{IR}$. Να βρεθούν οι αριθμοί α, β, γ και δ αν ισχύει ότι P(1)=P(2)=P(3)=P(4)=0.

Λύση: Επειδή το πολυώνυμο είναι **το πολύ 3ου βαθμού**, ενώ έχει τέσσερις ρίζες, τότε έπεται από το θεώρημα 2.6 ότι είναι το μηδενικό. Άρα α=β=γ=δ=0.

Πόρισμα 2.7: Ένα πολυώνυμο P(x) βαθμού ν, έχει το πολύ ν ρίζες.

Απόδειξη: Έπεται άμεσα από το θεώρημα 2.6.■

Πόρισμα 2.8: Αν το πολυώνυμο P(x) έχει άπειρες ρίζες, τότε είναι το μηδενικό και αντίστροφα.

[5] Οι φράσεις «το πολύ…βαθμού» ή «βαθμού το πολύ…» θα σημειώνονται με έντονους χαρακτήρες, για να θυμάται ο αναγνώστης ότι υπάρχει ξεχωριστός ορισμός και ότι δεν εννοούμε μόνο την περίπτωση 0≤βαθμ[P(x)]≤ν.

Απόδειξη: Έπεται άμεσα από το θεώρημα 2.6.■

<u>Πόρισμα 2.9:</u> Αν για το πολυώνυμο P(x) ισχύει P(ρ)=c για άπειρες τιμές του ρ, τότε το P(x) είναι το σταθερό πολυώνυμο c και αντίστροφα.

Απόδειξη: Έστω ότι P(ρ)=c για άπειρες τιμές του ρ. Θεωρούμε το πολυώνυμο G(x)=P(x)–c. Τότε σύμφωνα με το πόρισμα 2.8, το G(x)=0(x). Άρα P(x)=c. Το αντίστροφο είναι προφανές.■

<u>Πόρισμα 2.10:</u> Αν για δύο πολυώνυμα P(x) και Q(x) ισχύει P(ρ)=Q(ρ) για άπειρες τιμές του ρ, τότε τα πολυώνυμα P(x) και Q(x) είναι ίσα και αντίστροφα.

Απόδειξη: Έστω ότι P(ρ)=Q(ρ) για άπειρες τιμές του ρ. Θεωρούμε το πολυώνυμο G(x)=P(x)–Q(x). Τότε σύμφωνα με το πόρισμα 2.8, το G(x)=0(x). Άρα P(x)–G(x)=0(x)⇔ P(x)=G(x). Το αντίστροφο είναι προφανές.■

<u>Πόρισμα 2.11:</u> Ισχύει ότι τα πολυώνυμα P(x) και Q(x) είναι ίσα, αν και μόνο αν P(ρ)=Q(ρ) για κάθε ρ∈**IR**.

Απόδειξη: Έπεται άμεσα από το πόρισμα 2.10.■

<u>Πρόταση 2.12:</u> Αν το πολυώνυμο ν βαθμού έχει ν στο πλήθος ρίζες, όχι αναγκαστικά διαφορετικές μεταξύ τους, τότε $P(x)=\alpha_\nu(x-\rho_1)\cdot(x-\rho_2)\cdot\ldots\cdot(x-\rho_\nu)$, όπου $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\nu$ είναι οι ρίζες του πολυωνύμου.

Απόδειξη: Έπεται άμεσα από το λήμμα 2.5.

<u>4) Το σχήμα Horner</u>

Το σχήμα Horner είναι ένας εναλλακτικός και πιο γρήγορος τρόπος για να κάνουμε διαίρεση, όταν ο διαιρέτης είναι της μορφής x–ρ. Για παράδειγμα η διαίρεση (x^3+5x+6): (x–2) με το σχήμα Horner εκτελείται ως εξής:

1	0	5	6	ρ=2
↓	2	4	18	
1	2	9	24	

(α) Την πρώτη γραμμή συμπληρώνουμε με τους συντελεστές του διαιρετέου. Δεν πρέπει να ξεχνούμε να βάζουμε το μηδέν όταν λείπει κάποιος όρος.

(β) Στην τελευταία στήλη της πρώτης γραμμής γράφουμε τον αριθμό ρ, όπου $-\rho$ είναι ο σταθερός όρος του διαιρέτη $x-\rho$.

(γ) Στην πρώτη θέση της τρίτης γραμμής κατεβάζουμε τον πρώτο συντελεστή της πρώτης γραμμής.

(δ) Κάθε στοιχείο της δεύτερης γραμμής προκύπτει με πολλαπλασιασμό του αμέσως προηγούμενου στοιχείου της τρίτης γραμμής με τον αριθμό ρ.

(ε) Κάθε στοιχείο της τρίτης γραμμής, εκτός βέβαια από το πρώτο, προκύπτει ως το άθροισμα των στοιχείων της πρώτης με τη δεύτερη γραμμή.

Το τελευταίο στοιχείο της τρίτης γραμμής είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης. Τα άλλα στοιχεία της τρίτης γραμμής είναι οι συντελεστές του πηλίκου της διαίρεσης, το οποίο πηλίκο βέβαια έχει βαθμό κατά ένα μικρότερο από αυτό του διαιρετέου. Άρα το υπόλοιπο αυτής της διαίρεσης είναι το σταθερό πολυώνυμο $\upsilon(x)=24$ και το πηλίκο είναι το $\pi(x)=x^2+2x+9$.

<u>5) Παραδείγματα</u>

Παράδειγμα 1: Να αποδειχτεί ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το πολυώνυμο $\alpha x+\beta$, όπου $\alpha\neq 0$, ισούται με $\upsilon = P\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)$.

Λύση: Επειδή το πολυώνυμο $\alpha x+\beta$ είναι πρώτου βαθμού, τότε το υπόλοιπο έπεται ότι θα είναι **το πολύ $0^{ου}$ βαθμού**, δηλαδή $\upsilon=c$. Άρα

P(x)=(αx+β)·Q(x)+c. Επομένως $P\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)=\left[\alpha\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)+\beta\right]\cdot Q\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)+c$ =0+c=c. Δηλαδή $\upsilon=P\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)$. Το παράδειγμα αυτό είναι γενίκευση του θεωρήματος 2.2.

Παράδειγμα 2: Πολυώνυμο P(x) διαιρούμενο με το x–2 δίνει υπόλοιπο 4, ενώ διαιρούμενο με το x+1 δίνει υπόλοιπο –2. Να υπολογιστεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το (x–2)·(x+1).

Λύση: Η διαίρεση του P(x) με το (x–2)·(x+1) θα αφήνει υπόλοιπο ένα πολυώνυμο **το πολύ 1ου βαθμού**. Άρα υ(x)=αx+β. Επομένως P(x)=(x–2)·(x+1)·Q(x)+αx+β. Όμως η διαίρεση του P(x) με το x–2 δίνει υπόλοιπο 4 και σύμφωνα με το θεώρημα 2.2 θα ισχύει P(2)=4 όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα:

P(x)	x–2
….	π(x)
υ=P(2)	
(υ=4)	

Όμοια, επειδή η διαίρεση του P(x) με το x+1 δίνει υπόλοιπο –2 θα ισχύει P(–1)= –2. Άρα P(2)=4⇔ P(2)=(2–2)·(2+1)·Q(2)+α·2+β=4⇔2α+β=4 (1). Ακόμη P(–1)=(–1–2)·(–1+1)·Q(–1)+α·(–1)+β= –2⇔ –α+β= –2 (2). Από το σύστημα των (1) και (2) προκύπτει ότι α=2 και β=0, δηλαδή υ(x)=2x.

Παράδειγμα 3: Να υπολογιστούν οι αριθμοί α, β∈**IR**, ώστε το πολυώνυμο $P(x)=\alpha x^{\nu+1}+\beta x^{\nu}+1$ να έχει παράγοντα το $(x-1)^2$.

Λύση: Αφού το P(x) θέλουμε να έχει παράγοντα το $(x-1)^2$, τότε θα έχει παράγοντα και το x–1. Από το θεώρημα 2.3 λοιπόν έπεται ότι P(1)=0⇔α+β+1=0⇔β=–1–α. Άρα $P(x)=\alpha x^{\nu+1}-(\alpha+1)x^{\nu}+1$. Εφαρμόζοντας τη διαίρεση του P(x) με το x–1 με τη βοήθεια του σχήματος Horner, παίρνουμε:

α	−1−α	0	0	…	0	1	ρ=1
↓	α	−1	−1	…	−1	−1	
α	−1	−1	−1	…	−1	0	

Άρα $P(x)=(x-1)\cdot Q(x)$, όπου $Q(x)=\alpha x^{\nu}-x^{\nu-1}-x^{\nu-2}-\ldots-1$. Θέλουμε όμως το $P(x)$ να έχει παράγοντα το $(x-1)^2$, δηλαδή να υπάρχει πολυώνυμο $\pi(x)$ ώστε $P(x)=(x-1)^2\cdot\pi(x)$. Άρα πρέπει $Q(x)=(x-1)\cdot\pi(x)$, δηλαδή το $x-1$ να διαιρεί και το $Q(x)$. Αυτό σημαίνει ισοδύναμα, από το θεώρημα 2.3, ότι $Q(1)=0 \Leftrightarrow \alpha\underbrace{-1-1-\ldots-1}_{\nu \text{ όροι}}=0 \Leftrightarrow \alpha-\nu=0 \Leftrightarrow \alpha=\nu$. Άρα $\alpha=\nu$ και τότε παίρνουμε ότι $\beta=-1-\nu$.

Παράδειγμα 4: Να αποδειχτεί ότι το πολυώνυμο $P(x)=(x+1)^{2\nu}-x^{2\nu}-2x-1$ διαιρείται από το πολυώνυμο $Q(x)=2x^3+3x^2+x$.

Λύση: Έχουμε $Q(x)=2x^3+3x^2+x=x\cdot(2x^2+3x+1)=x\cdot 2\cdot(x+2)\cdot(x+1)$

Δηλαδή $Q(x)=2x(x+2)(x+1)$. Να υπενθυμίσουμε ότι $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2)$, όπου ρ_1 και ρ_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου.

Τώρα $Q(x)\mid P(x) \Leftrightarrow P(x)=Q(x)\cdot\pi_1(x) \Leftrightarrow P(x)=2x(x+2)(x+1)\cdot\pi_1(x)=$

$x(x+2)(x+1)\cdot\pi(x)$, όπου $\pi_1(x)=2\cdot\pi(x)$. Δηλαδή $Q(x)\mid P(x) \Leftrightarrow$ $x(x+2)(x+1)\mid P(x)$. Η τελευταία σχέση σύμφωνα με το λήμμα 2.5 είναι ισοδύναμη με τη σχέση: $(x\mid P(x)$ και $(x+2)\mid P(x)$ και $(x+1)\mid P(x)) \Leftrightarrow$ $(P(0)=0$ και $P(-2)=0$ και $P(-1)=0)$. Εύκολα τώρα επαληθεύουμε με αντικατάσταση ότι ισχύουν οι τρεις τελευταίες ισότητες, άρα ισχύει και $Q(x)\mid P(x)$.

Παράδειγμα 5: Να αποδειχτεί η ταυτότητα $\alpha^{\nu}-\beta^{\nu}=(\alpha-\beta)\cdot(\alpha^{\nu-1}+\alpha^{\nu-2}\beta+\alpha^{\nu-3}\beta^2+\ldots+\beta^{\nu-1})$.

Λύση: Πριν δούμε την απόδειξη, να παρατηρήσουμε ότι στη 2^{η} παρένθεση οι εκθέτες του α «κατεβαίνουν», ενώ οι εκθέτες του β «ανεβαίνουν». Το άθροισμα των εκθετών είναι πάντα ίσο με $\nu-1$ δεδομένου ότι ο πρώτος και ο τελευταίος όρος γράφονται αντίστοιχα ως $\alpha^{\nu-1}\beta^0$ και $\alpha^0\beta^{\nu-1}$. Επομένως για $\nu=2$ και $\nu=3$ παίρνουμε τις γνωστές ταυτότητες $\alpha^2-\beta^2=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$ και $\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$. Για ν=4 παίρνουμε $\alpha^4-\beta^4=(\alpha-\beta)(\alpha^3+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta^3)$ κ.ο.κ.

Για να αποδείξουμε τη γενική μορφή της ταυτότητας θέτουμε για ευκολία x=α. Θα αποδείξουμε δηλαδή ότι $x^\nu-\beta^\nu=(x-\beta)\cdot(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}\beta+x^{\nu-3}\beta^2+\ldots+\beta^{\nu-1})$. Προς τούτο, εκτελούμε τη διαίρεση του $x^\nu-\beta^\nu$ με το $x-\beta$ χρησιμοποιώντας το σχήμα Horner:

$\mathbf{x^\nu}$ $\downarrow$	$\mathbf{x^{\nu-1}}$ $\downarrow$	$\mathbf{x^{\nu-2}}$ $\downarrow$		$\mathbf{x^1=x^{\nu-(\nu-1)}}$ $\downarrow$		
1	0	0	…	0	$-\beta^\nu$	ρ=β
$\downarrow$	β	β^2	…	$\beta^{\nu-1}$	β^ν	
1	β	β^2	…	$\beta^{\nu-1}$	0	

Άρα το υπόλοιπο της διαίρεσης είναι υ=0 (μηδενικό πολυώνυμο) και το πηλίκο είναι το $\pi(x)=x^{\nu-1}+x^{\nu-2}\beta+x^{\nu-3}\beta^2+\ldots+\beta^{\nu-1}$. Άρα $x^\nu-\beta^\nu=(x-\beta)\cdot(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}\beta+x^{\nu-3}\beta^2+\ldots+\beta^{\nu-1})$. Πάνω από την πρώτη γραμμή που δείχνει του συντελεστές του διαιρετέου γράφουμε το x με τον αντίστοιχο εκθέτη του, διότι ο εκθέτης αυτός μας βοηθάει να βρούμε τον αντίστοιχο εκθέτη του β σε κάθε στήλη. Πιο συγκεκριμένα όταν ο εκθέτης του x είναι της μορφής ν–κ, τότε ο αριθμός κ είναι ο εκθέτης του β.

Παράδειγμα 6: Να αποδειχτεί ότι οι καμπύλες της μορφής $(y-x-1)+\lambda(x+y-5)=0$ όπου $\lambda\in\mathbb{R}$ (1), διέρχονται από το ίδιο σημείο (οικογένεια καμπυλών).

Λύση: Αν υπάρχει σημείο (x_0,y_0) ώστε οι καμπύλες της μορφής (1) να διέρχονται από αυτό, τότε θα ισχύει $(y_0-x_0-1)+\lambda(x_0+y_0-5)=0$ για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$. Δηλαδή το πολυώνυμο $P(\lambda)=A\cdot\lambda+B$ όπου $A=y_0-x_0-1$ και $B=x_0+y_0-5$, θα πρέπει να έχει άπειρες ρίζες και σύμφωνα με το πόρισμα 2.8 πρέπει να είναι το μηδενικό. Αυτό συμβαίνει όταν $A=B=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} y_0-x_0-1=0\\ x_0+y_0-5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x_0-y_0=1\\ x_0+y_0=5\end{cases}$$. Από την επίλυση του συστήματος

βρίσκουμε ότι $x_0=3$ και $y_0=2$. Άρα όλες οι καμπύλες διέρχονται από το σημείο (3,2).

Παράδειγμα 7: Να βρεθούν οι τιμές των πραγματικών αριθμών Α και Β, ώστε να ισχύει $\frac{2x+1}{x^2-5x+6}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}$ (1) για κάθε $x\in$**IR**, με $x\neq 2$ και $x\neq 3$.

Λύση: $\frac{2x+1}{x^2-5x+6}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}\Leftrightarrow\frac{2x+1}{(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow(x-2)(x-3)\frac{2x+1}{(x-2)(x-3)}=(x-2)(x-3)\frac{A}{x-2}+(x-2)(x-3)\frac{B}{x-3}\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 2x+1=A(x-3)+B(x-2)$ (2)

Για να συνεχίσουμε υπάρχουν δύο τρόποι:

Ά τρόπος: Παίρνουμε τη σχέση (2) και μεταφέρουμε όλους τους όρους στο πρώτο μέλος: (2)$\Leftrightarrow(2-A-B)x+1+2A+3B=0$. Επειδή η εξίσωση αυτή θέλουμε να έχει άπειρες ρίζες, τότε το πολυώνυμο $P(x)=(2-A-B)x+1+2A+3B$ πρέπει να είναι το μηδενικό. Άρα πρέπει $(2-A-B=0$ και $1+2A+3B=0)\Leftrightarrow(A+B=0$ και $2A+3B=-1)$. Η επίλυση του συστήματος δίνει $A=-5$ και $B=7$.

Να παρατηρήσουμε ότι αν στη (2) θέσουμε όπου $x=2$, τότε παίρνουμε αμέσως ότι $A=-5$ και αν θέσουμε όπου $x=3$ παίρνουμε ότι $B=7$. Είναι ένας εύκολος τρόπος για επαλήθευση, ωστόσο η τεκμηρίωση είναι λίγο πιο δύσκολη όπως φαίνεται και παρακάτω:

Β΄ τρόπος: Αναζητούμε τους αριθμούς Α και Β, ώστε η εξίσωση (2) να έχει άπειρες λύσεις. Δηλαδή, σύμφωνα με το πόρισμα 2.10 ψάχνουμε δύο αριθμούς Α και Β, ώστε τα πολυώνυμα $P(x)=2x+1$ και $Q(x)=A(x-3)+B(x-2)$ να είναι ίσα. Αν είναι ίσα όμως, από το πόρισμα 2.11 θα ισχύουν οι ισότητες $P(2)=Q(2)$ και $P(3)=Q(3)$. Δηλαδή στην εξίσωση (2) νομιμοποιούμαστε να θέσουμε όπου $x=2$ και $x=3$ παρόλο που στην εξίσωση (1) έχουμε εξαιρέσει αυτές τις τιμές. Για $x=2$, η εξίσωση (2), μας δίνει $-5=A$. Για $x=3$, η εξίσωση (2), μας δίνει $7=B$. Άρα $A=-5$ και $B=7$. Τώρα για $A=-5$ και $B=7$ επαληθεύουμε ότι τα πολυώνυμα P(x) και Q(x) είναι ίσα. Πράγματι $2x+1=-5(x-3)+7(x-2) \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow 2x+1=2x+1$ ισχύει.

Όπως είπαμε, ο β΄ τρόπος είναι πιο δύσκολος να τεκμηριωθεί, ωστόσο βρίσκουμε πιο γρήγορα τους ζητούμενους αριθμούς. Με το σκεπτικό του β΄ τρόπου, η επαλήθευση είναι απαραίτητη διότι δεν γνωρίζουμε αν οι τιμές που βρίσκουμε για τα A και B καθιστούν τα πολυώνυμα ίσα (αναγκαίες αλλά όχι κατ' ανάγκη και ικανές συνθήκες). Στην πραγματικότητα πάντα οι τιμές που θα βρίσκουμε θα καθιστούν τα πολυώνυμα ίσα, και μάλιστα θα είναι μοναδικές, σύμφωνα με την εκφώνηση της άσκησης 15 παρακάτω.

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u>

1) Να κάνετε τις παρακάτω διαιρέσεις:

(α) $(x^4+x^3+3x^2+2x+6) : (x^2-1)$ (β) $(x^4+2x^3+5x^2-4x+1) : (x^2-3x+2)$

(γ) $(x^5-3x^2+6x-7) : (x^3+6x+1)$ (δ) $(x^5-x^2+x-1) : (x+2)$

2) Να κάνετε τις παρακάτω διαιρέσεις με τη βοήθεια του σχήματος Horner:

(α) $(2x^4+4x^3+x^2-5x+6) : (x+2)$ (β) $(-2x^3+5x^2+4) : (x-1)$

(γ) $(2x^4-x^2+3) : (x+\frac{1}{2})$.

3) Να κάνετε τις διαιρέσεις :

(α) $(x^3+3\alpha\beta x-\alpha^3+\beta^3) : (x-\alpha+\beta)$ (β) $(x^4-\alpha x^2+\alpha x-4) : (x+2\alpha)$

4) Να βρείτε τα υπόλοιπα των παρακάτω διαιρέσεων:

(α) $(x^{30}-2x^{20}+5x^{11}+1) : (x+1)$

(β) $[(x-2)^{18}-4(2x-3)^7+3x^2-11] : (x-2)$

(γ) $[(4x-9)^{2\nu}-4(9-x^3)^\nu+3x-1] : (x-2)$

5) (α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β, ώστε τα πολυώνυμα $x-1$ και $x+2$ να είναι παράγοντες του πολυωνύμου $P(x)=(2\alpha-\beta)x^3+3\alpha x^2-(5\beta-2\alpha)x+\alpha+\beta+1$.

(β) Για τις παραπάνω τιμές που βρήκατε, να αναλύσετε το $P(x)$ σε γινόμενο τριών πρωτοβαθμίων παραγόντων.

6) Να δείξετε ότι τα παρακάτω πολυώνυμα δεν έχουν παράγοντα της μορφής $x-\rho$:

(α) $P(x)=3x^8+5x^6+1$ (β) $Q(x)= -6x^{16}-3x^4-1$

7) Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

(α) $\alpha^\nu-\beta^\nu=(\alpha+\beta)(\alpha^{\nu-1}-\alpha^{\nu-2}\beta+\alpha^{\nu-3}\beta^2-\ldots-\beta^{\nu-1})$ για ν άρτιο αριθμό.

(β) $\alpha^\nu+\beta^\nu=(\alpha+\beta)(\alpha^{\nu-1}-\alpha^{\nu-2}\beta+\alpha^{\nu-3}\beta^2-\ldots+\beta^{\nu-1})$ για ν περιττό αριθμό.

8) Να αποδείξετε ότι αν το ν είναι παράγοντας του μ, τότε και το $x^\nu-\alpha^\nu$ είναι παράγοντας του $x^\mu-\alpha^\mu$.

9) (α) Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $g(x)=x^2-3x+2$ διαιρεί το πολυώνυμο

$f(x)=(x-2)^{2\nu}+(x-1)^\nu-1$, $\nu\in\mathbf{IN}^*$.

(β) Όμοια να δείξετε ότι το $g(x)=2x^3-3x^2+x$ διαιρεί το πολυώνυμο

$f(x)=(x-1)^{2\nu}-x^{2\nu}+2x-1$, $\nu\in\mathbf{IN}^*$.

10) (α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β, ώστε το πολυώνυμο $P(x)=x^4+(\alpha-\beta)x^3+2\alpha x^2-5x+4$ να διαιρείται με το $(x-1)^2$.

(β) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β, ώστε το πολυώνυμο $P(x)=2x^{\nu+1}+(\alpha-1)x+2\beta$ να διαιρείται με το $(x+1)^2$.

11) (α) Να αποδείξετε ότι οι καμπύλες της μορφής $(\lambda+1)x+(\lambda+1)y+4\lambda-2=0$, $\lambda\in\mathbf{IR}$, διέρχονται από σταθερό σημείο.

(β) Να δείξετε το ίδιο για τις καμπύλες της μορφής $(\lambda^2+\lambda+1)x+(\lambda^2-2\lambda)y-3\lambda-1=0$, $\lambda\in\mathbf{IR}$.

12) Να αποδείξετε ότι όλες οι καμπύλες της μορφής $x^2+y^2-2x+\lambda(x^2+y^2-1)=0$ όπου $\lambda\in\mathbf{IR}$, διέρχονται από δύο σταθερά σημεία.

13) (α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς Α και Β, ώστε να ισχύει:

$$\frac{2x+3}{x^2-7x+12}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-4}$$ για κάθε $x\in\mathbf{IR}$, με $x\neq3$ και $x\neq4$.

(β) Όμοια, ώστε $\frac{3x+1}{x^2-3x+2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}$ για κάθε $x\in\mathbf{IR}$, με $x\neq1$ και $x\neq2$.

14) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς Α, Β και Γ ώστε να ισχύει $\frac{1}{x(x+1)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{\Gamma}{x+2}$ για κάθε $x\in\mathbf{IR}$, με $x\neq0$, $x\neq-1$ και $x\neq-2$.

15) Αν $\rho_1 \neq \rho_2$, τότε να δείξετε ότι υπάρχουν μοναδικοί πραγματικοί αριθμοί Α και Β ώστε να ισχύει $\dfrac{\alpha x+\beta}{(x-\rho_1)(x-\rho_2)}=\dfrac{A}{x-\rho_1}+\dfrac{B}{x-\rho_2}$ για κάθε $x\in$**IR**, με $x\neq\rho_1$ και $x\neq\rho_2$.

16) Έστω πολυώνυμο P(x). Όταν το P(x) διαιρείται με το (x+1) δίνει υπόλοιπο 2, ενώ όταν διαιρείται με το (x+2) δίνει υπόλοιπο 8. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το (x+1)(x+2).

17) (α) Έστω πολυώνυμο P(x) **βαθμού το πολύ ν**.[6] Αν υπάρχουν $\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_{\nu+1}\in$**IR** διαφορετικά ανά δύο μεταξύ τους ώστε $P(\rho_1)=P(\rho_2)=\ldots=P(\rho_{\nu+1})=c$, τότε να δείξετε ότι το P(x) είναι σταθερό πολυώνυμο.

(β) Αν $\alpha,\beta,\gamma\in$**IR** διαφορετικά ανά δύο μεταξύ τους, τότε να δείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)=\dfrac{(x-\alpha)(x-\beta)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}+\dfrac{(x-\beta)(x-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\dfrac{(x-\gamma)(x-\alpha)}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)}$ είναι σταθερό.

18) Να βρείτε το $\lambda\in$**IR**, ώστε η διαίρεση $[(\lambda+9)x^3+(\lambda^2+11)x+7\lambda] : (2x-1)$ να είναι τέλεια.

(*Υπόδειξη: Μπορείτε να εφαρμόσετε την εκφώνηση του παραδείγματος 1.)*

19) (α) Να δείξετε ότι το υπόλοιπο τη διαίρεσης ενός πολυώνυμου P(x) με το $x^2-\alpha^2$ $(\alpha\neq 0)$ είναι το πολυώνυμο $\upsilon(x)=\dfrac{P(\alpha)-P(-\alpha)}{2\alpha}x+\dfrac{P(\alpha)+P(-\alpha)}{2\alpha}$.

(β) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης $(x^{100}-3x^{47}+5x^3-4x+1) : (x^2-1)$.

---

[6] Βλέπε ορισμό.

20) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης $[(2x^2-1)^{500}+3(x^2-1)^{400}-7x^{300}+6x-3] : (x^3-x)$.

21) Έστω πολυώνυμο P(x) με P(x)=P(x+2). Να δείξετε ότι υπάρχει πολυώνυμο Q(x) και σταθερός αριθμός c, ώστε $P(x)=(x^2+2x)Q(x)+c$.

22) Να δείξετε ότι το $P(x)=(\nu-2)x^{\nu}-\nu x^{\nu-1}+\nu x-\nu+2$ διαιρείται με το $(x-1)^3$.

23) Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x)=x^2+x+1$ και το $Q(x)=P(P(x))-P(x)-2$. Να δείξετε ότι το P(x)+1 είναι παράγοντας του Q(x).

24) Δίνεται το $P(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x+1$ το οποίο έχει παράγοντα το $(x-1)^2$.

(α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β.

(β) Να βρείτε τις ρίζες του πολυωνύμου.

(γ) Να παραγοντοποιήσετε το P(x).

ΕΝΟΤΗΤΑ 3η: Πολυωνυμικές Εξισώσεις-Ανισώσεις

1) Επίλυση πολυωνυμικών Εξισώσεων

Ορισμός: Πολυωνυμική εξίσωση βαθμού ν ονομάζεται κάθε εξίσωση της μορφής $\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_0=0$ με $\alpha_\nu\neq 0$. [1]

Σε πολυωνυμικές εξισώσεις βαθμού 3 και άνω προσπαθούμε να παραγοντοποιήσουμε το 1ο μέλος της εξίσωσης, ώστε να σχηματιστούν παράγοντες πρώτου και δευτέρου βαθμού.

Εφαρμογή 1: Να λυθεί η εξίσωση $x^3-2x^2+5x-10=0$.

Λύση: $x^3-2x^2+5x-10=0 \Leftrightarrow x^2(x-2)+5(x-2)=0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2+5)=0 \Leftrightarrow$

$x=2$ ή $x^2=-5$ (αδύνατο). Άρα $x=2$.

Πολλές φορές η παραγοντοποίηση δεν είναι τόσο εύκολη υπόθεση. Χρήσιμο εργαλείο για την παραγοντοποίηση αποτελεί το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 3.1 (Ακεραίων Ριζών): Έστω η πολυωνυμική εξίσωση $\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_0=0$ με ακέραιους συντελεστές. Αν ο ακέραιος $\rho\neq 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε ο ρ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου α_0.

Απόδειξη: Αν ο ακέραιος $\rho\neq 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε $\alpha_\nu\rho^\nu+\alpha_{\nu-1}\rho^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1\rho+\alpha_0=0 \Leftrightarrow \alpha_0=-\alpha_\nu\rho^\nu-\alpha_{\nu-1}\rho^{\nu-1}-\ldots-\alpha_1\rho \Leftrightarrow$

$\alpha_0=\rho(-\alpha_\nu\rho^{\nu-1}-\alpha_{\nu-1}\rho^{\nu-2}-\ldots-\alpha_1)$. Όμως οι αριθμοί ρ, α_ν, $\alpha_{\nu-1},\ldots,\alpha_1$ είναι ακέραιοι και άρα το ίδιο συμβαίνει και με την παράσταση:

$\rho(-\alpha_\nu\rho^{\nu-1}-\alpha_{\nu-1}\rho^{\nu-2}-\ldots-\alpha_1)$. Αυτό σημαίνει ότι ο αριθμός ρ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου α_0. ■

Παρατήρηση: Το θεώρημα αυτό λέει πως αν το πολυώνυμο P(x) έχει ακέραιες ρίζες, τότε αυτές θα είναι διαιρέτες του σταθερού όρου. Για παράδειγμα το πολυώνυμο x^2-5x+6 έχει ρίζες τους αριθμούς 2 και 3 που είναι διαιρέτες του 6.

[7] Σε αντίθεση με τα πολυώνυμα, στις πολυωνυμικές εξισώσεις το x εκφράζει έναν πραγματικό αριθμό.

Ωστόσο το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει. Για παράδειγμα οι διαιρέτες του 6 είναι οι αριθμοί ±1, ±2, ±3 και ±6. Όμως μόνο οι αριθμοί 2 και 3 είναι ρίζες του προηγούμενου πολυωνύμου. Επιπλέον, έστω το πολυώνυμο $P(x)=2x^3-x^2-6x+3$. Οι διαιρέτες του 3 είναι οι αριθμοί ±1 και ±3. Όμως κανένας από αυτούς δεν είναι ρίζα του P(x).

Εφαρμογή 2: Να λυθεί η εξίσωση $x^3-4x^2+2x+3=0$.

Λύση: Θέτουμε $P(x)= x^3-4x^2+2x+3$. Σύμφωνα με το θεώρημα ακεραίων ριζών οι πιθανές ακέραιες ρίζες είναι οι αριθμοί ±1 και ±3. Παρατηρούμε ότι $P(1)\neq 0$, $P(-1)\neq 0$, αλλά $P(3)= 3^3-4\cdot 3^2+2\cdot 3+3=0$. Η παραγοντοποίηση του πολυωνύμου θα επιτευχθεί με τη βοήθεια του σχήματος Horner για ρ=3 (που είναι ρίζα του πολυωνύμου):

1	–4	2	3	ρ=3
↓	3	–3	–3	
1	–1	–1	0(=P(3))	

Άρα $P(x)=(x-3)\cdot(x^2-x-1)$.

Επομένως $x^3-4x^2+2x+3=0 \Leftrightarrow (x-3)\cdot(x^2-x-1)=0 \Leftrightarrow x-3=0$ ή $x^2-x-1=0 \Leftrightarrow$ $x=3$ ή $x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

2) Πρόσημο πολυωνυμικής παράστασης[8]

Έστω το πολυώνυμο $P(x)=6(x-2)^3(x-1)^2(x-4)$. Παρατηρούμε ότι $P(2)=P(1)=P(4)=0$. Δηλαδή οι αριθμοί $\rho_1=1$, $\rho_2=2$ και $\rho_3=4$ είναι ρίζες του πολυωνύμου. Ωστόσο λόγω των εκθετών θα λέμε ότι ο $\rho_1=1$ είναι ρίζα πολλαπλότητας 2 (διπλή ρίζα), ο $\rho_2=2$ είναι ρίζα πολλαπλότητας 3 και ο $\rho_3=4$ είναι ρίζα πολλαπλότητας 1 (απλή ρίζα). Χάρη στην ισχύ του θεωρήματος 2.3 μπορούμε να δώσουμε τον παρακάτω τυπικό ορισμό για την πολλαπλότητα της ρίζας ενός πολυωνύμου:

[8] Για ευκολία μια πολυωνυμική παράσταση (ή ακόμη και μια πολυωνυμική συνάρτηση) της μορφής $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_0$ θα λέγεται πολυώνυμο. Στην πραγματικότητα η ταύτιση δεν είναι δυνατή, διότι στην πολυωνυμική παράσταση (ή συνάρτηση) εννοούμε ότι το x είναι πραγματικός αριθμός πράγμα που δεν ισχύει στα πολυώνυμα.

Ορισμός: Έστω $\nu \in \mathbb{N}^*$. Τότε θα λέμε ότι ο αριθμός ρ είναι ρίζα του πολυωνύμου P(x) πολλαπλότητας ν, όταν το $(x-\rho)^\nu$ διαιρεί το P(x) ενώ το πολυώνυμο $(x-\rho)^{\nu+1}$ δεν διαιρεί το P(x).

Ισοδύναμα, θα λέγαμε ότι το πολυώνυμο P(x) έχει ρίζα τον αριθμό ρ πολλαπλότητας ν, όταν $P(x)=(x-\rho)^\nu \cdot Q(x)$, με $Q(\rho)\neq 0$.

Εφαρμογή 3: Να λυθεί η ανίσωση $3(x-1)^3(x-2)^7(x-4)>0$.

Λύση: Θέτουμε $P(x)= 3(x-1)^3(x-2)^7(x-4)$. Όλες οι ρίζες $\rho_1=1$, $\rho_2=2$ και $\rho_3=4$ του πολυωνύμου αυτού είναι περιττής πολλαπλότητας.

- Για $x>4$, όλοι οι παράγοντες είναι θετικοί. Άρα $P(x)>0$.
- Για $2<x<4$, ο παράγοντας $x-4$ είναι αρνητικός και οι υπόλοιποι θετικοί. Άρα $P(x)<0$.
- Για $1<x<2$, οι παράγοντες $(x-2)^7$ και $(x-4)$ είναι αρνητικοί ενώ ο $(x-1)^3$ είναι θετικός. Άρα $P(x)=3\underbrace{(x-1)^3}_{(+)}\cdot\underbrace{(x-2)^7}_{(-)}\underbrace{(x-4)}_{(-)}>0$.
- Για $x<1$, όλοι οι παράγοντες είναι αρνητικοί, οπότε $P(x)=3\underbrace{(x-1)^3}_{(-)}\cdot\underbrace{(x-2)^7}_{(-)}\underbrace{(x-4)}_{(-)}<0$.

Τα αποτελέσματα συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		1		2		4		$+\infty$
P(x)		−	0	+	0	−	0	+	

Παρατηρήστε ότι το πρώτο κουτάκι από τα δεξιά είναι ομόσημο του αριθμού α=3.

Γενικά αν έχουμε πολυώνυμο της μορφής $P(x)=\alpha(x-\rho_1)^{\nu_1}\cdot(x-\rho_2)^{\nu_2}\cdot\ldots\cdot(x-\rho_\kappa)^{\nu_\kappa}$ με $\alpha\neq 0$, $\rho_1<\rho_2<\ldots<\rho_\kappa$ και $\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_\kappa$ περιττοί, τότε για $x>\rho_\kappa$ το πολυώνυμο P(x) είναι ομόσημο του α. Δηλαδή το πρώτο δεξιό κουτάκι είναι ομόσημο του α, ενώ τα πρόσημα στα άλλα πάνε εναλλάξ. Για παράδειγμα έστω για $\alpha\neq 0$ το πολυώνυμο $P(x)=\alpha(x-\rho_1)\ (x-\rho_2)\ (x-\rho_2)$, του οποίου οι ρίζες $\rho_1<\rho_2<\rho_3$ είναι απλές και άρα περιττής πολλαπλότητας. Τότε σύμφωνα με όσα είπαμε ισχύει:

x	$-\infty$		ρ_1		ρ_2		ρ_3		$+\infty$
P(x)		ετερ. α	0	ομοσ. α	0	ετερ. α	0	ομοσ. α	

Εφαρμογή 4: Να βρεθεί το πρόσημο του πολυωνύμου $Q(x)=-3(x+4)(x-2)^3(x-8)^9$ για τις διάφορες τιμές του x.

Λύση: Παρατηρούμε ότι όλες οι ρίζες είναι περιττής πολλαπλότητας. Σύμφωνα με τον κανόνα που είδαμε παραπάνω, το πρόσημο του πολυωνύμου για τις διάφορες τιμές x, φαίνεται σε αυτόν τον πίνακα:

x	$-\infty$		-4		2		8		$+\infty$
Q(x)		+	0	−	0	+	0	−	

Τι γίνεται όμως αν έχουμε μια ρίζα άρτιας πολλαπλότητας; Στην περίπτωση αυτή το πρόσημο εκατέρωθεν της άρτιας ρίζας παραμένει ίδιο. Για παράδειγμα το πρόσημο του πολυωνύμου $P(x)=-3(x-1)^3(x-2)^8(x-4)$ έχει ως εξής:

x	$-\infty$		1		2		4		$+\infty$
P(x)		−	0	+	0	+	0	−	

- Δηλαδή όπως και πριν το πρώτο κουτάκι από δεξιά είναι ομόσημο του α, οπότε στην περίπτωση αυτή γράφουμε «–».
- Στο δεύτερο κουτάκι από δεξιά βάζουμε «+», δηλαδή αλλάζουμε το πρόσημο, διότι η ρίζα $\rho_1=4$ είναι περιττής πολλαπλότητας.
- Επειδή η ρίζα $\rho_2=2$ είναι άρτιας πολλαπλότητας, το πρόσημο στο τρίτο κουτάκι από δεξιά θα διατηρηθεί, άρα γράφουμε «+».
- Τέλος επειδή η ρίζα $\rho_3=1$ είναι περιττής πολλαπλότητας, θα αλλάξει το πρόσημο στο τέταρτο κουτάκι από δεξιά, δηλαδή θα γίνει «–».

3) Παραδείγματα

Παράδειγμα 1: Να βρεθεί το πρόσημο του πολυωνύμου $P(x)=(x-1)(x^2-3x+2)(-x^2+x-1)$ για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού x.

Λύση: Αυτό το παράδειγμα αποτελεί μια γενίκευση του προηγούμενου κανόνα εύρεσης προσήμων ενός πολυωνύμου, όταν αυτό εκφράζεται ως γινόμενο πρωτοβαθμίων και δευτεροβαθμίων παραγόντων. Πρώτα υπολογίζουμε τις ρίζες των παραγόντων:

- $x-1$: Ρίζα έχει τον αριθμό $\rho_1=1$.
- x^2-3x+2: Ρίζες έχει τους αριθμούς $\rho_1=1$ και $\rho_2=2$ (με διακρίνουσα)
- $-x^2+x-1$: Το τριώνυμο αυτό έχει αρνητική διακρίνουσα, οπότε δεν έχει πραγματικές ρίζες.

Συνοψίζοντας, το πολυώνυμο έχει διπλή ρίζα τον αριθμό $\rho_1=1$ και απλή ρίζα τον αριθμό $\rho_2=2$, διότι $P(x)=(x-1)(x^2-3x+2)(-x^2+x-1)=$ $=(x-1)^2(x-2)(-x^2+x-1)$. Το α είναι ο συντελεστής του γινομένου των μεγιστοβαθμίων όρων: $x\cdot x^2\cdot(-x^2)= -1\cdot x^5$. Άρα $\alpha= -1$. Επομένως ο πίνακας προσήμων του P(x) είναι ο ακόλουθος:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
P(x) α=-1		+	0	+	0	ομοσ. α —	

Προσέξτε ότι η ρίζα $\rho_1=1$ είναι άρτιας πολλαπλότητας και για αυτό δεν αλλάζει το πρόσημο του P(x) εκατέρωθέν της.

Ένας δεύτερος τρόπος είναι να υπολογίσουμε πρώτα τα πρόσημα κάθε παράγοντα χωριστά:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2-3x+2		$+$	0	$-$	0	$+$	
$-x^2+x-1$		$-$		$-$		$-$	
$P(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	

Παράδειγμα 2: Να λυθεί η ανίσωση $x^4-x^3+x^2-3x-6\geq 0$.

Λύση: Θέτουμε $P(x)=x^4-x^3+x^2-3x-6$. Πιθανές ακέραιες ρίζες της εξίσωσης είναι οι αριθμοί ± 1, ± 2, ± 3, ± 6. Παρατηρούμε ότι $P(-1)=0$. Άρα με τη βοήθεια του σχήματος Horner για $\rho=-1$ πραγματοποιούμε την παραγοντοποίηση του πολυωνύμου:

1	–1	1	–3	–6	ρ= –1
↓	–1	2	–3	6	
1	–2	3	–6	$\boxed{0}$	

Άρα $P(x)=(x+1)(x^3-2x^2+3x-6)=(x+1)[x^2(x-2)+3(x-2)]=$

$=(x+1)(x-2)(x^2+3)$. Επειδή $x^2+3>0$, ο παράγοντας αυτός δεν έχει ρίζες. Πολλαπλασιάζουμε τους μεγιστοβάθμιους όρους: $x\cdot x\cdot x^2=1x^4$, άρα $\alpha=1$.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Επομένως $P(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\leq -1$ ή $x\geq 2$.

Παράδειγμα 3: Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^5+\alpha x^4+\beta x^3-49x^2-30x+72$, όπου α και β πραγματικοί αριθμοί. Να βρεθούν οι αριθμοί α και β, ώστε το πολυώνυμο $P(x)$ να έχει παράγοντες τα πολυώνυμα $x+1$ και $x-2$. Ύστερα να λυθεί η εξίσωση $P(x)=0$.

Λύση: Το πολυώνυμο $x+1$ είναι παράγοντας του $P(x)$ αν και μόνο αν $P(-1)=0 \Leftrightarrow -1+\alpha-\beta-49+30+72=0 \Leftrightarrow \alpha-\beta=-2$ (1).

Όμοια το πολυώνυμο $x-2$ είναι παράγοντας του $P(x)$ αν και μόνο αν $P(2)=0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow 4\alpha+2\beta=38$ (2).

Από τη λύση του συστήματος των εξισώσεων (1) και (2) προκύπτει ότι $\alpha=-11$ και $\beta=41$. Άρα $P(x)=x^5-11x^4+41x^3-49x^2-30x+72$. Επειδή τα πολυώνυμα $x+1$ και $x-2$ είναι παράγοντες του $P(x)$, θα ισχύει ότι $P(x)=(x+1)(x-2)Q(x)=(x^2-x-2)Q(x)$. Εκτελώντας τη διαίρεση του $P(x)$ με το x^2-x-2 ή εναλλακτικά εφαρμόζοντας διαδοχικά Horner για $\rho_1=-1$ και $\rho_2=2$, προκύπτει ότι $Q(x)=x^3-10x^2+22x-36$. Άρα:

$P(x)=(x+1)(x-2)(x^3-10x^2+22x-36)$. Οι πιθανές ακέραιες ρίζες του $Q(x)$ είναι οι $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm12, \pm18, \pm36$. Επειδή όμως διαδοχικά τα πρόσημα του πολυωνύμου είναι διαφορετικά και επειδή ο εκθέτης του μεγιστοβαθμίου όρου είναι περιττός, τότε οι πιθανές ακέραιες ρίζες είναι μόνο οι θετικές. (Πράγματι δοκιμάστε και παρατηρήστε ότι για κάθε $x_o<0$, ισχύει ότι $Q(x_o)<0$.)

Βλέπουμε ότι $Q(3)=0$. Άρα εφαρμόζουμε Horner για $\rho=3$:

1	−10	33	−36	ρ=3
↓	3	−3	36	
1	−7	12	0	

Άρα $P(x)=(x+1)(x-2)(x-3)(x^2-7x+12)$. Οι ρίζες του $x^2-7x+12$ είναι οι αριθμοί $\rho_3=3$ και $\rho_4=4$. Άρα το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζες τους αριθμούς $\rho_1=-1$, $\rho_2=2$, $\rho_3=3$ (διπλή ρίζα) και $\rho_4=4$, δηλαδή $P(x)=(x+1)(x-2)(x-3)^2(x-4)$.

Παράδειγμα 4: Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3-(\lambda+1)x^2+\lambda x+2$, $\lambda\in\mathbf{Z}$. Να βρεθούν οι τιμές του λ, ώστε η εξίσωση $P(x)=0$ (1) να έχει ακέραιες ρίζες. Για κάθε τέτοια τιμή του λ, να λυθεί η εξίσωση (1).

Λύση: Επειδή $\lambda \in \mathbf{Z}$, το πολυώνυμο P(x) έχει ακέραιους συντελεστές. Επομένως οι πιθανές ακέραιες ρίζες του είναι οι αριθμοί ±1, ±2.

- $P(1)=0 \Leftrightarrow 1^3-(\lambda+1)\cdot 1^2+\lambda\cdot 1+2=0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow 2=0$ αδύνατο.
- $P(-1)=0 \Leftrightarrow (-1)^3-(\lambda+1)\cdot(-1)^2+\lambda\cdot(-1)+2=0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \lambda=0$.
  Άρα $P(x)=x^3-x^2+2$. Εφαρμόζοντας σχήμα Horner για $\rho=-1$:

1	–1	0	2	ρ= –1
↓	–1	2	–2	
1	–2	2	0	

Άρα $P(x)=(x+1)(x^2-2x+2)$. Επειδή το τριώνυμο στη δεύτερη παρένθεση έχει αρνητική διακρίνουσα, έπεται ότι $P(x)=0 \Leftrightarrow x=-1$.

- $P(2)=0 \Leftrightarrow 2^3-(\lambda+1)\cdot 2^2+\lambda\cdot 2+2=0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \lambda=3$. Τότε $P(x)=x^3-4x^2+3x+2$. Όμοια όπως και στην προηγούμενη περίπτωση , εφαρμόζοντας σχήμα Horner για ρ=2, προκύπτει ότι $P(x)=(x-2)(x^2-2x-1)$. Επομένως σε αυτήν την περίπτωση η εξίσωση P(x)=0 έχει ρίζες τους αριθμούς $\rho_1=2$ και $\rho_{2,3}=1\pm\sqrt{2}$.
- $P(-2)=0 \Leftrightarrow (-2)^3-(\lambda+1)\cdot(-2)^2+\lambda\cdot(-2)+2=0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \lambda=-\frac{5}{3} \notin \mathbf{Z}$,

  απορρίπτεται.

Παράδειγμα 5: Να αποδειχθεί ότι το πολυώνυμο $P(x)=x^{\kappa}-x^{\kappa-2}-2x+2$ έχει διπλή ρίζα τον αριθμό ρ=1 (όπου $\kappa \in \mathbf{IN}$ με κ>3).

Λύση: Αν ο αριθμός ρ=1 είναι διπλή ρίζα του πολυωνύμου P(x), τότε θα ισχύει ότι $P(x)=(x-1)^2Q(x)$, με $Q(1)\neq 0$. Πράγματι $P(x)=x^{\kappa}-x^{\kappa-2}-2x+2=$

$=x^{\kappa-2}(x^2-1)-2(x-1)=(x-1)[x^{\kappa-2}(x+1)-2]=(x-1)(x^{\kappa-1}+x^{\kappa-2}-2)$. Θέτουμε $F(x)=x^{\kappa-1}+x^{\kappa-2}-2$. Παρατηρούμε ότι F(1)=0. Άρα $F(x)=(x-1)Q(x)$, επομένως ισχύει ότι $P(x)=(x-1)\cdot[(x-1)Q(x)]=(x-1)^2Q(x)$. Το πολυώνυμο Q(x) είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης του F(x) με το x–1:

1	1	0	…	0	–2	ρ= 1
↓	1	2	…	2	2	
1	2	2	…	2	0	

Άρα $Q(x)=x^{\kappa-2}+2x^{\kappa-3}+2x^{\kappa-4}+\ldots+2x+2$.

Επομένως $Q(1)=1+\underbrace{2+2+\ldots+2}_{\kappa-2\ \text{φορές}}=1+2(\kappa-2)>0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις δεν έχουν ακέραιες λύσεις:

(α) $2x^3-x^2+4x-2=0$ (β) $x^8-4x^2+2=0$ (γ) $2x^3+3x^2+8x+12=0$

(δ) $x^3+x-3=0$ (ε) $x^4-3x-2=0$ (στ) $2x^6-3x^2-2=0$

2) Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

(α) $x^4+3x^3+x^2-3x-2=0$ (β) $x^5-2x^4+2x^3-2x^2+x=0$

(γ) $2x^3-5x^2-4x+3=0$ (δ) $x^4+x^3-5x^2+x-6=0$

(ε) $5x^3+21x^2+28x+12=0$ (στ) $x^3+4x^2-7x+2=0$

3) Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

(α) $-x^4-3x^3-x^2+3x+2>0$ (β) $x^5-2x^4+2x^3-2x^2+x<0$

(γ) $-2x^3+5x^2+4x-3\geq 0$ (δ) $x^4+x^3-5x^2+x-6\leq 0$

(ε) $5x^3+21x^2+28x+12>0$ (στ) $x^3+4x^2-7x+2<0$

4) Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

(α) $\frac{1}{4}x^3+\frac{4}{3}x^2+\frac{1}{4}x-\frac{5}{6}=0$ (β) $x^3+\frac{13}{12}x^2-\frac{13}{12}x-1=0$

(γ) $\frac{1}{6}x^4-x^3+x-\frac{1}{6}=0$

5) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x:

(α) $f(x)=x^4-5x^3+3x^2+x$ (β) $f(x)=3x^3-3x^2-5x-2$

6) Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων με τύπους $f(x)=x^4+8x^2+20x-30$ και $g(x)=9x^3-10x^2+2x+10$. Σε ποια διαστήματα η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από αυτή της g;

7) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=(\lambda-1)x^3+\lambda^2x^2-\lambda^3x+2\lambda-1$, $\lambda\in\mathbf{Z}$. Να βρείτε τις τιμές του λ, ώστε το πολυώνυμο να έχει ρίζα τον αριθμό ρ=1. Ύστερα να λύσετε την εξίσωση P(x)=0.

8) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=(2\lambda^2-1)x^3-(\lambda^2+1)x^2-5x+8$, $\lambda\in\mathbf{Z}$. Να βρείτε τις τιμές του λ, ώστε το πολυώνυμο να έχει μία τουλάχιστον ακέραια ρίζα.

9) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+\kappa x^2-x+\lambda$. Αν είναι γνωστό ότι το πολυώνυμο έχει διαιρέτες τα πολυώνυμα $x-1$ και $x+3$, τότε να βρείτε τους αριθμούς κ και λ. Ύστερα να λύσετε την εξίσωση P(x)=0.

10) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=(3\lambda^3-1)x^4-(6\lambda+4)x^3+(7\lambda+8)x-9\lambda$, $\lambda\in\mathbf{Z}$. Αν είναι γνωστό ότι το πολυώνυμο έχει ρίζα τον αριθμό ρ=1, τότε να βρείτε το λ και τις άλλες ρίζες του πολυωνύμου.

11) Δίνεται η εξίσωση $x^\nu-(3\lambda+2)x+4=0$, $\lambda\in\mathbf{Z}$. Να εξετάσετε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση αυτή έχει ακέραιες ρίζες.

12) Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις δεν έχουν ακέραιες ρίζες:

(α) $x^{\nu}-2\lambda x-2=0$, όταν $\nu\in\mathbf{IN^*}$ και $\lambda\in\mathbf{Z}$, με $\lambda\neq0$ και $\lambda\neq1$.

(β) $6x^{\nu}-3\lambda x-1=0$, όταν $\nu\in\mathbf{IN^*}$ και $\lambda\in\mathbf{Z}$.

ΕΝΟΤΗΤΑ 4η: Εξισώσεις-Ανισώσεις που ανάγονται σε πολυωνυμικές.

1) Παραδείγματα

Παράδειγμα 1 (Κλασματικές εξισώσεις): Να λυθεί η εξίσωση:

$$\frac{3x^2-1}{x-1}-\frac{2}{x^2-x}=\frac{x^2-3x+2}{x} \quad (1).$$

Λύση: Κλασματική λέγεται μία εξίσωση, όταν σε ένα τουλάχιστον παρονομαστή βρίσκεται άγνωστος όρος. Η μεθοδολογία για την επίλυση τέτοιων εξισώσεων έχει ως εξής:

(α) Παραγοντοποιούμε τους παρονομαστές, χωρίς να κάνουμε καμία απλοποίηση.

(β) Βρίσκουμε τους περιορισμούς.

(γ) Βρίσκουμε το ΕΚΠ των παρονομαστών και πολλαπλασιάζουμε με αυτό κατά μέλη την εξίσωση, ώστε να απαλειφθούν οι παρονομαστές. Λύνουμε κατόπιν την εξίσωση που προκύπτει και ελέγχουμε αν πρέπει να απορρίψουμε κάποιες λύσεις λόγω περιορισμών.

Επομένως σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε τα εξής:

(α) $(1) \Leftrightarrow \frac{3x^2-1}{x-1}-\frac{2}{x(x-1)}=\frac{x^2-3x+2}{x} (2)$

(β) Για να ορίζεται η παράσταση πρέπει $x\neq 0$ και $x-1\neq 0 \Leftrightarrow$ $x\neq 0$ και $x\neq 1$.

(γ) ΕΚΠ$[x-1, x(x-1), x]=x(x-1)$ (οι κοινοί και μη κοινοί παράγοντες στο μέγιστο εκθέτη)

Άρα $(2) \Leftrightarrow x(x-1)\frac{3x^2-1}{x-1}-x(x-1)\frac{2}{x(x-1)}=x(x-1)\frac{x^2-3x+2}{x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x(3x^2-1)-2=(x-1)(x^2-3x+2) \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow x^3+2x^2-3x=0 \Leftrightarrow$

$x(x^2+2x-3)=0 \Leftrightarrow x=0$ (απορρ.) ή $x^2+2x-3=0 \Leftrightarrow x=1$ (απορρ.) ή $x=-3$.

Άρα $x=-3$.

Παράδειγμα 2 (Άρρητες εξισώσεις): Να λυθεί η εξίσωση:

$\sqrt{x+3} = x+1$ (1).

Λύση: Εξισώσεις των οποίων ο άγνωστος βρίσκεται μέσα σε ριζικά λέγονται άρρητες. Η λύση αυτών των εξισώσεων προκύπτει συνήθως υψώνοντας στο τετράγωνο. Γενικά όμως όταν υψώνουμε στο τετράγωνο μια εξίσωση, τότε ενδέχεται να μην προκύψει ισοδύναμη εξίσωση, δηλαδή εξίσωση με τις ίδιες ακριβώς ρίζες με αυτές της αρχικής. Για παράδειγμα έστω η λυμένη εξίσωση x=2. Αν υψώσουμε στο τετράγωνο, τότε προκύπτει η εξίσωση $x^2=4$ που έχει ως λύσεις τις $x_1=2$ και $x_2=-2$. Για αυτό είναι σωστό όταν υψώνουμε στο τετράγωνο να βάζουμε «συνεπάγεται» και όχι «ισοδυναμία». Επιπλέον όταν έχουμε λύσει την τελευταία εξίσωση πρέπει να επαληθεύουμε τις λύσεις και στην αρχική, διότι ενδέχεται η τελευταία να έχει περισσότερες λύσεις από την πρώτη.

Η εξίσωση (1) ορίζεται όταν η υπόρριζη ποσότητα είναι μη αρνητική, δηλαδή όταν $x+3\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -3$. Τότε $\sqrt{x+3} = x+1 \Rightarrow \left(\sqrt{x+3}\right)^2 = (x+1)^2$

$\Leftrightarrow x+3 = x^2+2x+1 \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow$ x=1 ή x= −2. Οι λύσεις αυτές δεν απορρίπτονται λόγω περιορισμών, όμως:

(α) Για x=1 (1)$\Leftrightarrow$ $\sqrt{1+3} = 1+1 \Leftrightarrow \sqrt{4} = 2$ ισχύει

(β) Για x= −2 (1)$\Leftrightarrow$ $\sqrt{-2+3} = -2+1 \Leftrightarrow \sqrt{1} = -1$ δεν ισχύει.

Επομένως μόνη δεκτή λύση είναι η x=1.

Αν προσέξουμε την αρχική εξίσωση, θα διαπιστώσουμε ότι αφού το 1^o μέλος ισούται με μη αρνητικό αριθμό, τότε και στο 2^o μέλος πρέπει να ισχύει το ίδιο. Δηλαδή $x+1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -1$. Αν λάβουμε υπόψη αυτόν τον επιπλέον περιορισμό, τότε διαπιστώνουμε ότι η λύση x= −2 απορρίπτεται κατευθείαν.

Παράδειγμα 3 (Άρρητες εξισώσεις): Να λυθεί η εξίσωση:

$\sqrt{x+3} = \sqrt{10-x} + 1$ (1).

Λύση: Πρέπει $x+3\geq 0$ και $10-x\geq 0 \Leftrightarrow -3\leq x\leq 10$. Τότε

$$\sqrt{x+3}=\sqrt{10-x}+1\Rightarrow\left(\sqrt{x+3}\right)^2=\left(\sqrt{10-x}+1\right)^2\Leftrightarrow$$

$$x+3=10-x+1^2+2\sqrt{10-x}\Leftrightarrow 2x-8=2\sqrt{10-x}\Leftrightarrow x-4=\sqrt{10-x}$$

$$\Rightarrow(x-4)^2=10-x\Leftrightarrow x^2-8x+16=10-x\Leftrightarrow x^2-7x+4=0\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow$ x=6 ή x=1. Μετά από επαλήθευση γίνεται δεκτή μόνο η x=6. Άλλωστε, το γεγονός ότι η x=1 πρέπει να απορριφθεί μπορούμε να το διαπιστώσουμε από το σημείο στο οποίο παίρνουμε την ισότητα $x-4=\sqrt{10-x}$, διότι προφανώς αυτή η παράσταση έχει νόημα όταν $x\geq4$.

Παράδειγμα 4 (Ρητές ανισώσεις): Να λυθεί η ανίσωση
$\dfrac{x^2-3x-10}{x-1}\leq-2$.

Λύση: Η παράσταση ορίζεται, όταν $x\neq1$. Τότε για $x\neq1$έχουμε:

$$\frac{x^2-3x-10}{x-1}\leq-2\Leftrightarrow\frac{x^2-3x-10}{x-1}+2\leq0\Leftrightarrow\frac{x^2-3x-10+2x-2}{x-1}\leq0\Leftrightarrow$$

$\dfrac{x^2-x-12}{x-1}\leq0\Leftrightarrow\left(x^2-x-12\right)(x-1)\leq0$. Να σημειώσουμε ότι εφαρμόσαμε την ιδιότητα $\dfrac{A}{B}\leq0\Leftrightarrow A\cdot B\leq0$όταν $B\neq0$, ως απόρροια του γεγονότος ότι το γινόμενο και το πηλίκο δύο παραστάσεων είναι πάντα ομόσημοι αριθμοί. Το τριώνυμο x^2-x-12 έχει ρίζες τους αριθμούς $x_1=-4$, $x_2=3$. Ο πίνακας προσήμων σύμφωνα με τις τεχνικές που μάθαμε στην προηγούμενη ενότητα έχει ως εξής:

x	$-\infty$	-4		1		3		$+\infty$
$(x^2-x-12)(x-1)$	$-$	0	+	0	$-$	0	+	

Άρα $\dfrac{x^2-3x-10}{x-1}\leq-2\Leftrightarrow x\in(-\infty,-4]\cup(1,3]$.

Παράδειγμα 5 (Άρρητες ανισώσεις): Να λυθεί η ανίσωση $\sqrt{x-3} > x-5$ (1).

Λύση: Η παράσταση ορίζεται, όταν $x \geq 3$. Επίσης παρατηρούμε ότι ισχύει $x-5 \geq 0$ όταν $x \geq 5$. Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

- Αν $3 \leq x < 5$, τότε στο πρώτο μέλος η ποσότητα είναι μη αρνητική ενώ στο δεύτερο είναι. Άρα η ανίσωση (1) ισχύει σε αυτή την περίπτωση.
- Αν $x \geq 5$, τότε οι ποσότητες και στα δύο μέλη είναι μη αρνητικές οπότε μπορούμε και μάλιστα με ισοδυναμία να υψώσουμε στο τετράγωνο: $\sqrt{x-3} > x-5 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x-3}\right)^2 > (x-5)^2 \Leftrightarrow$ $x-3 > x^2-10x+25 \Leftrightarrow x^2-11x+28 < 0$. Το τριώνυμο αυτό έχει ρίζες τους αριθμούς $x_1=4$ και $x_2=7$. Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τα πρόσημα του τριωνύμου για τις διάφορες τιμές του x:

x	$-\infty$		4		5		7		$+\infty$
$x^2-11x+28$		+	0	−		−	0	+	

Άρα όταν $x \geq 5$ ισχύει $x^2-11x+28<0$ αν και μόνο αν $x \in [5, 7)$.

Συνοψίζοντας, η ανίσωση (1) επαληθεύεται για $x \in [3, 7)$.

Παράδειγμα 5: Να λυθεί η εξίσωση $2ημ^4x-3ημ^3x-3συν^2x-3ημx+4=0$ (1).

Λύση: Μετατρέπουμε στην (1) το συνημίτονο σε ημίτονο με τη βοήθεια της ταυτότητας $συν^2x=1-ημ^2x$. Τότε η εξίσωση (1) ισοδύναμα γράφεται:

(1)$\Leftrightarrow 2ημ^4x-3ημ^3x+3ημ^2x-3ημx+1=0$ (2) Θέτουμε στη (2) $y=ημx$. Τότε $-1 \leq y \leq 1$. Η (2) γράφεται ως εξής: $2y^4-3y^3+3y^2-3y+1=0$ (3). Θέτουμε $P(y)= 2y^4-3y^3+3y^2-3y+1$. Πιθανές ακέραιες ρίζες ± 1. Βλέπουμε ότι $P(1)=0$. Άρα με τη βοήθεια του σχήματος Horner παίρνουμε:

2	−3	3	−3	1	ρ=1
↓	2	−1	2	−1	
2	−1	2	−1	0	

Επομένως $P(y)=(y-1)(2y^3-y^2+2y-1)=(y-1)[2y(y^2+1)-(y^2+1)]=$

(y–1)(y^2+1)(2y–1). Άρα P(y)=0⇔y=1 ή $y=\frac{1}{2}$.

- y=1⇔ ημx=1⇔$x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}$, κ∈**Z**.
- $y=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6} \\ \text{ή} \\ x=2\kappa\pi+\frac{5\pi}{6} \end{cases}$, κ∈**Z**.

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u>

1) Να λύσετε τις παρακάτω κλασματικές εξισώσεις:

(α) $x^2-\frac{2}{1+2x}=\frac{1}{x}-\frac{2}{1+2x}$ (β) $\frac{3x^2+1}{x-1}-\frac{4}{x^2-x}=\frac{x^2-3x+2}{x}$

(γ) $\frac{x^2}{x-1}-\frac{2}{x+1}=\frac{4}{x^2-1}$ (δ) $\frac{3}{x^2-9}-\frac{1}{x^2-6x+9}-\frac{3}{2x^2+6x}=0$.

2) Να λύσετε τις παρακάτω κλασματικές ανισώσεις:

(α) $\frac{x+4}{5-x}\le 0$ (β) $\frac{(x+1)^2(x-3)^7}{x-2}\ge 0$

(γ) $\frac{(1-x^2)(3-x)}{x^2-7x+12}<0$ (δ) $\frac{3x^2+1}{x-1}-\frac{4}{x^2-x}<\frac{x^2-3x+2}{x}$

(ε) $\frac{3}{x^2-9}-\frac{1}{x^2-6x+9}>\frac{3}{2x^2+6x}$

3) Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

(α) $\sqrt{15x+6}=6$ (β) $3-\sqrt{x}=\sqrt{x}-5$ (γ) $\sqrt{2-5x}=x-10$

(δ) $\sqrt{x-3}+4=0$ (ε) $\sqrt{x}=-x$ (στ) $\sqrt{x-3}=-|x-3|$

(ζ) $\sqrt{x-2}=\sqrt{6-x}-\sqrt{4-x}$ (η) $2x^2-3x+3=\sqrt{2x^2-3x+2}$

(θ) $x^2+2\sqrt{x^2-3x+11}=3x+4$ (ι) $\sqrt{\dfrac{16x}{x-1}}+\sqrt{\dfrac{x-1}{16x}}=\dfrac{5}{2}$

4) Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

(α) $x-1\le\sqrt{x+1}$ (β) $3x+2<\sqrt{2x^2+x}$

(γ) $\sqrt{x+2}<2+\sqrt{x+6}$ (δ) $\sqrt{3x-1}+\sqrt{2x-3}\le\sqrt{x+12}$

(ε) $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x-2}>7$ (στ) $\sqrt{x^2-2x+6}\ge 2x-3$

ΕΝΟΤΗΤΑ 5^{η}: Ειδικά θέματα πάνω στα πολυώνυμα.

1) Θεώρημα ρητών ριζών

Το παρακάτω θεώρημα αποτελεί γενίκευση του θεωρήματος ακεραίων ριζών και μας επιτρέπει να εντοπίζουμε πιθανές ρητές ρίζες σε μια πολυωνυμική εξίσωση με ακέραιους συντελεστές:

Θεώρημα 5.1: Έστω η πολυωνυμική εξίσωση $\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_0=0$ με ακέραιους συντελεστές και $\alpha_\nu\neq0$. Αν ο ρητός αριθμός $\frac{\kappa}{\lambda}\neq0$ (όπου $\kappa, \lambda\in\mathbf{Z}$ με κ, λ πρώτοι μεταξύ τους και $\lambda\neq0$) είναι ρίζα της πολυωνυμικής εξίσωσης, τότε ο κ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου α_o και ο λ είναι διαιρέτης του συντελεστή α_ν.

Απόδειξη: Βλέπε στο παράρτημα. ■

Παράδειγμα 1: Να λυθεί η εξίσωση $2x^4+3x^3+2x^2-1=0$ (1).

Λύση: Θέτουμε $P(x)=2x^4+3x^3+2x^2-1$. Οι διαιρέτες του σταθερού όρου $\alpha_o=-1$ είναι οι ±1. Οι διαιρέτες του συντελεστή του μεγιστοβαθμίου όρου, δηλαδή του $\alpha_4=2$ είναι οι ±1 και ±2. Επομένως οι πιθανές ρητές ρίζες σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα είναι οι $\pm1,\pm\frac{1}{2}$. Με δοκιμές βρίσκουμε ότι $P(-1)=0$ και $P\left(\frac{1}{2}\right)=0$. Κατόπιν εφαρμόζοντας διαδοχικά σχήμα Horner για $\rho_1=-1$ και $\rho_2=\frac{1}{2}$ παίρνουμε την παραγοντοποίηση $P(x)=(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x^2+2x+2)$. Ο τελευταίος παράγοντας έχει αρνητική διακρίνουσα, οπότε έπεται ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες μόνο τους αριθμούς $x_1=-1$ και $x_2=\frac{1}{2}$.

2) Αντίστροφες εξισώσεις

Ορισμός: Έστω η πολυωνυμική εξίσωση $\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_0=0$. Αυτή ονομάζεται αντίστροφη αν για κάθε ρίζα $\rho\neq0$ έχει ρίζα και τον αριθμό $\frac{1}{\rho}$.

Χρήσιμο για τη σχέση των συντελεστών των αντίστροφων πολυωνυμικών εξισώσεων αποτελεί το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 5.2: Έστω η αντίστροφη πολυωνυμική εξίσωση $\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_0=0$. Τότε:

- Αν $\nu=2\kappa$, $\kappa\in\mathbb{N}$ και $\alpha_\kappa\neq0$, δηλαδή όταν το πολυώνυμο είναι άρτιου βαθμού με μη μηδενικό το μεσαίο συντελεστή, τότε οι συντελεστές που ισαπέχουν από τα άκρα είναι ίσοι. Αυτό σημαίνει ότι $\alpha_o=\alpha_{2\kappa}$, $\alpha_1=\alpha_{2\kappa-1}$ κ.τ.λ.
- Αν $\nu=2\kappa$, $\kappa\in\mathbb{N}$ και $\alpha_\kappa=0$ ή όταν $\nu=2\kappa+1$, δηλαδή αν το πολυώνυμο είναι είτε άρτιου βαθμού με μηδενικό το μεσαίο συντελεστή είτε περιττού βαθμού, τότε οι συντελεστές που ισαπέχουν από τα άκρα θα είναι ή μόνο ίσοι ή μόνο αντίθετοι. Με άλλα λόγια θα ισχύει $\alpha_o=\alpha_\nu$, $\alpha_1=\alpha_{\nu-1}$, … κ.τ.λ. ή θα ισχύει $\alpha_o=-\alpha_\nu$, $\alpha_1=-\alpha_{\nu-1}$, … κ.τ.λ.

Απόδειξη: Παραλείπεται. ■

Παραδείγματα αντίστροφων πολυωνυμικών εξισώσεων είναι τα $x^2+3x+1=0$, $2x^4+5x^3-5x-2=0$, $8x^5+3x^4+7x^3+7x^2+3x+8=0$ κ.τ.λ. Παρακάτω θα δούμε ενδεικτικά παραδείγματα που δείχνουν πώς λύνουμε αντίστροφες πολυωνυμικές εξισώσεις.

Παράδειγμα 2: Να λυθεί η εξίσωση $x^4-5x^3+8x^2-5x+1=0$ (1).

Λύση: Αυτό το παράδειγμα δείχνει πώς λύνουμε αντίστροφες εξισώσεις άρτιου βαθμού με ίσους τους ισαπέχοντες από τα άκρα συντελεστές.

Επειδή οι εξισώσεις αυτής της μορφής δεν έχουν ρίζα τον αριθμό μηδέν, μπορούμε να διαιρέσουμε με x^k όπου $\nu=2k$ είναι ο βαθμός της πολυωνυμικής εξίσωσης. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα διαιρούμε με το x^2 . Τότε ισχύει:

$(1)\overset{:x^2}{\Rightarrow} x^2-5x+8-\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{x^2}\Leftrightarrow\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)-5\left(x-\dfrac{1}{x}\right)+8=0$ (2). Θέτουμε στη (2) $y=x+\dfrac{1}{x}$. Τότε $y^2=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2\Rightarrow\ldots\Rightarrow x^2+\dfrac{1}{x^2}=y^2-2$. Τότε

$(2)\Rightarrow y^2-2-5y+8=0\Rightarrow y^2-5y+6=0\Rightarrow y=2$ ή $y=3$.

- Για y=2, έχουμε $x+\dfrac{1}{x}=2\Rightarrow x^2+1=2x\Leftrightarrow(x-1)^2=0\Leftrightarrow x=1$ (διπλή ρίζα).
- Για y=3, έχουμε $x+\dfrac{1}{x}=3\Rightarrow x^2+1=3x\Leftrightarrow x^2-3x+1=0\Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.

Παράδειγμα 3: Να λυθεί η εξίσωση $x^5-4x^4+3x^3+3x^2-4x+1=0$ (1).

Λύση: Αυτό το παράδειγμα δείχνει πώς λύνουμε αντίστροφες εξισώσεις περιττού βαθμού με ίσους ή αντίθετους τους ισαπέχοντες από τα άκρα συντελεστές. Με παρόμοιο τρόπο λύνονται και οι άρτιου βαθμού εξισώσεις όταν οι ισαπέχοντες από τα άκρα συντελεστές είναι αντίθετοι. Σε αυτές τις περιπτώσεις χρησιμοποιούμε την ταυτότητα $x^\nu-1=(x-1)(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}+\ldots+x+1)$ ή την ταυτότητα $x^\nu+1=(x+1)(x^{\nu-1}-x^{\nu-2}+\ldots-x+1)$ (στη δεύτερη περίπτωση το ν είναι περιττός αριθμός). Στο παράδειγμα αυτό έχουμε:

$(1)\Leftrightarrow (x^5+1)-4(x^3+1)+3x^2(x+1)=0$

$\Leftrightarrow (x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)-4(x+1)(x^2-x+1)+3x^2(x+1)=0\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(x+1)(x^4-5x^3+8x^2-5x+1)=0\Leftrightarrow$ $x=-1$ ή $x^4-5x^3+8x^2-5x+1=0$. Η τελευταία εξίσωση είναι η εξίσωση του παραδείγματος (2).

3) Πολυωνυμικές εξισώσεις με άρρητες ρίζες.

Θεώρημα 5.3: Έστω η πολυωνυμική εξίσωση $\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_0=0$, με ρητούς συντελεστές. Αν ο άρρητος αριθμός $\alpha+\sqrt{\beta}$ (όπου α, β ρητοί με $\sqrt{\beta}$ άρρητο) είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε και ο αριθμός $\alpha-\sqrt{\beta}$ είναι επίσης ρίζα της εξίσωσης.

Απόδειξη: Βλέπε στο παράρτημα. ■

Παράδειγμα 4: Δίνεται η εξίσωση $x^4-2x^3-4x^2+6x+3=0$. Να επαληθευτεί ότι ο αριθμός $1+\sqrt{2}$ είναι ρίζα της εξίσωσης και ύστερα να βρεθούν όλες οι ρίζες της εξίσωσης αυτής.

Λύση: Εύκολα διαπιστώνουμε με αντικατάσταση ότι το πολυώνυμο $P(x)=x^4-2x^3-4x^2+6x+3$ έχει ρίζα τον αριθμό $\rho_1=1+\sqrt{2}$. Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα θα έχει ρίζα και τον αριθμό $\rho_2=1-\sqrt{2}$. Άρα το P(x), σύμφωνα με το λήμμα 2.4, θα έχει διαιρέτη το πολυώνυμο $Q(x)=(x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2})=\ldots=x^2-2x-1$. Εκτελώντας τη διαίρεση του P(x) με το Q(x) λαμβάνουμε την ισότητα $P(x)=(x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2})(x^2-3)$. Επομένως, οι άλλες δύο ρίζες της εξίσωσης είναι οι αριθμοί $\rho_{3,4}=\pm\sqrt{3}$.

4) Οι τύποι του Vieta για πολυώνυμα ν-στου βαθμού.

Θεώρημα 5.4: Έστω το πολυώνυμο $P(x)= \alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_0$, με $\alpha_\nu\neq 0$, το οποίο έχει ρίζες τους αριθμούς $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\nu$ οι οποίοι δεν είναι κάποιοι ή όλοι κατ' ανάγκη διαφορετικοί μεταξύ τους. Τότε ισχύουν οι εξής ισότητες:

- $S_1 = \rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_\nu = -\dfrac{\alpha_{\nu-1}}{\alpha_\nu}$.
- $S_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 + \rho_1 \cdot \rho_3 + \ldots + \rho_{\nu-1} \cdot \rho_\nu = +\dfrac{\alpha_{\nu-2}}{\alpha_\nu}$.
- …
- $S_\nu = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \ldots \cdot \rho_\nu = \pm\dfrac{\alpha_o}{\alpha_\nu}$, όπου ο τύπος ισχύει με «+» όταν ν άρτιος ή με «–» όταν ν περιττός.

Απόδειξη: Παραλείπεται. ■

Γενικότερα η παράσταση S_κ ισούται με το άθροισμα όλων των δυνατών γινομένων των ριζών με πλήθος παραγόντων ίσο με τον αριθμό κ σε κάθε όρο. Παρατηρήστε ότι τα πρόσημα στο 2^o μέλος εναλλάσσονται : –, +, –, κ.τ.λ. Ειδικά στην περίπτωση που ο μεγιστοβάθμιος συντελεστής α_ν ισούται με τη μονάδα, τότε το πολυώνυμο P(x) γράφεται στη μορφή:

$$P(x)=x^\nu-(\rho_1+\rho_2+\ldots+\rho_\nu)x^{\nu-1}+(\rho_1\cdot\rho_2+\rho_1\cdot\rho_3+\ldots+\rho_{\nu-1}\cdot\rho_\nu)x^{\nu-2}-\ldots\pm \rho_1\cdot\rho_2\cdot\ldots\cdot\rho_\nu$$

όπου πάλι ο τύπος ισχύει με «+» όταν ν άρτιος ή με «–» όταν ν περιττός.

Παράδειγμα 5: Να αποδειχθούν οι τύποι του Vieta για πολυώνυμα της μορφής $P(x)= x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma$.

Απόδειξη: Έστω ρ_1, ρ_2, ρ_3 οι ρίζες του πολυωνύμου P(x). Τότε σύμφωνα με την πρόταση 2.12, θα ισχύει $P(x)=(x-\rho_1)(x-\rho_2)(x-\rho_3)$ το οποίο μετά από πράξεις μας δίνει την ισότητα:

$$P(x)=x^3-(\rho_1+\rho_2+\rho_3)x^2+(\rho_1\cdot\rho_2+\rho_1\cdot\rho_3+\rho_2\cdot\rho_3)x-\rho_1\cdot\rho_2\cdot\rho_3.$$

Παράδειγμα 6: Να βρεθεί ο αριθμός α, ώστε το πολυώνυμο $P(x)=x^3-9x^2+\alpha x-24$ να έχει τρεις πραγματικές ρίζες που να αποτελούν διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

Λύση: Έστω ρ_1, ρ_2, ρ_3 οι ρίζες του πολυωνύμου P(x). Σύμφωνα με τον τύπο που καταλήξαμε στο παράδειγμα 5, θα ισχύει ότι $\rho_1+\rho_2+\rho_3=9$ (1), $\rho_1\cdot\rho_2+\rho_1\cdot\rho_3+\rho_2\cdot\rho_3=\alpha$ (2) και $\rho_1\cdot\rho_2\cdot\rho_3=24$ (3). Αφού οι αριθμοί ρ_1, ρ_2, ρ_3 αποτελούν διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, τότε χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\rho_1=\rho-\omega$, $\rho_2=\rho$ και $\rho_3=\rho+\omega$, με $\omega>0$. Τότε $(1)\Rightarrow 3\rho=9\Leftrightarrow\rho=3$ και $(3)\Rightarrow(\rho-\omega)\cdot\rho\cdot(\rho+\omega)=24\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow\omega=1$. Επομένως για $\rho=3$ και $\omega=1$ η σχέση (2) δίνει ότι $\alpha=26$.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 1

Η «μεταβλητή» x και ο Δακτύλιος των Πολυωνύμων

Αποδεικνύεται ότι μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα υπερσύνολο του **IR**, το οποίο θα συμβολίσουμε με **Δ**, δηλαδή $\mathbf{IR}\subseteq\mathbf{\Delta}$ και για το οποίο υπάρχει ένα στοιχείο x, ώστε $x\in\mathbf{\Delta}$ και $x\notin\mathbf{IR}$. Το σύνολο αυτό ονομάζεται *Δακτύλιος Πολυωνύμων* και το στοιχείο x ονομάζεται *μεταβλητή*. Οι πράξεις του πολλαπλασιασμού και της πρόσθεσης επεκτείνονται κατά τέτοιο τρόπο μεταξύ του x με τον εαυτό του και μεταξύ του x με τους πραγματικούς αριθμούς, ώστε να ισχύουν τα παρακάτω:

1) $\alpha\cdot x=x\cdot\alpha$ για κάθε $\alpha\in\mathbf{IR}$. Μάλιστα ισχύουν ότι 0x=0, 1x=x. Αν $\alpha\neq0$ και $\alpha\neq1$, τότε $\alpha x\neq x$ με $\alpha x\notin\mathbf{IR}$. Ορίζουμε τη δύναμη $x^0=1$ και $x^\nu=\underbrace{x\cdot x\cdot\ldots\cdot x}_{\nu\ \text{παράγοντες}}$. Ισχύει ότι $x^\nu\notin\mathbf{IR}$ για κάθε $\nu\in\mathbf{IN^*}$.

2) Κάθε στοιχείο του Δ παίρνει τη μορφή $\alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2x^2+\ldots+\alpha_\nu x^\nu$, όπου α_0, α_1, $\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu\in\mathbf{IR}$. Κάθε παράσταση αυτής της μορφής λέγεται *πολυώνυμο του x* και συμβολίζεται συνήθως με P(x), Q(x) κ.τ.λ. Σύμφωνα με όσα είπαμε, προκύπτει ότι αν $\text{βαθμ}[P(x)]\geq1$[9], τότε $P(x)\notin\mathbf{IR}$. Επειδή α_1, $\alpha_2,\ldots$, $\alpha_\nu\in\mathbf{IR}$, το σύνολο Δ συμβολίζεται και με **IR[x]**.

3) Έστω δύο πολυώνυμα $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_0$ και $Q(x)=\beta_\mu x^\mu+\beta_{\mu-1}x^{\mu-1}+\ldots+\beta_0$ με $\mu\geq\nu$. Από την κατασκευή του συνόλου **IR[x]** προκύπτει ότι τα δύο πολυώνυμα είναι ίσα, και γράφουμε P(x)=Q(x), αν και μόνο αν $\alpha_0=\beta_0$, $\alpha_1=\beta_1,\ldots,\alpha_\nu=\beta_\nu$ και $\beta_{\nu+1}=\beta_{\nu+2}=\ldots=\beta_\mu=0$.

4) Από την κατασκευή του συνόλου **IR[x]**, προκύπτει επίσης ότι για οποιαδήποτε πολυώνυμα P(x), Q(x) και Z(x) ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

(α) P(x)+Q(x)=Q(x)+P(x).

(β) $P(x)\cdot Q(x)=Q(x)\cdot P(x)$.

---

[9] Όπου βαθμ[P(x)] εννοούμε το βαθμό του πολυωνύμου P(x), βλέπε ενότητα 1^η.

(γ) $1\cdot P(x)=P(x)$.

(δ) $(P(x)+Q(x))+Z(x)=P(x)+(Q(x)+Z(x))$.

(ε) $0(x)+P(x)=P(x)$, όπου $0(x)$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

(στ) Για κάθε $P(x)$ υπάρχει ένα πολυώνυμο $P΄(x)$, ώστε $P(x)+P΄(x)=0(x)$. Το $P΄(x)$ συμβολίζεται και ως $-P(x)$.

(ζ) $(P(x)\cdot Q(x))\cdot Z(x)=P(x)\cdot(Q(x)\cdot Z(x))$

(η) $P(x)(Q(x)+Z(x))=P(x)Q(x)+P(x)Z(x)$

Αν σε ένα σύνολο γενικά ισχύουν οι ιδιότητες (α),(δ),(ε) έως (η), τότε αυτό λέγεται *Δακτύλιος*. Αν ισχύει επιπλέον η ιδιότητα (β), τότε λέγεται *μεταθετικός δακτύλιος*. Αν επιπλέον ισχύει και η ιδιότητα (γ), τότε λέγεται *μεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο*. Άρα το **IR[x]** είναι ένας μεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο. Στην πρώτη ενότητα αποδεικνύεται ότι αν $P(x)\cdot Q(x)=0(x)$, τότε $P(x)=0(x)$ ή $Q(x)=0(x)$. Σε αυτή την περίπτωση ο μεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο λέγεται *ακέραια περιοχή*.

Ο τρόπος κατασκευής του **IR[x]** ξεφεύγει από τους σκοπούς αυτών των σημειώσεων. Ο απαιτητικός αναγνώστης μπορεί να απευθυνθεί στην πανεπιστημιακή βιβλιογραφία.[10]

[10] Βλέπε π.χ. το «Μια εισαγωγή στην Άλγεβρα» εκδ. Σοφία (2005), των Βάρσο Δ., Δεριζιώτη Δ κ.α.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 2

(ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΘΕΩΡΗΜΑΤΩΝ)

Θεώρημα 2.1: **Για κάθε ζεύγος πολυωνύμων Δ(x) και δ(x) με δ(x)≠0(x) υπάρχουν δύο μοναδικά πολυώνυμα π(x) και υ(x), τέτοια ώστε Δ(x)=δ(x)·π(x)+υ(x), όπου υ(x)=0(x) ή βαθμ[υ(x)]<βαθμ[δ(x)].**

Απόδειξη: Έστω $\Delta(x)=\alpha_0+\alpha_1x+\ldots+\alpha_\nu x^\nu$ και $\delta(x)=\beta_0+\beta_1x+\ldots+\beta_\mu x^\mu$, όπου $\beta_\mu\neq 0$. Πρώτα θα δείξουμε την ύπαρξη των π(x) και υ(x):

Α) Αν Δ(x)=0(x) ή βαθμ[Δ(x)]< βαθμ[δ(x)], τότε Δ(x)= 0·δ(x)+Δ(x) και άρα π(x)=0(x) και υ(x)=Δ(x).

Β) Έστω βαθμ[Δ(x)]≥ βαθμ[δ(x)]. Θα εφαρμόσουμε επαγωγή στο βαθμ[Δ(x)].

i) Έστω ότι βαθμ[Δ(x)]=0. Τότε θα ισχύει αναγκαστικά και ότι βαθμ[δ(x)]=0. Επομένως $\Delta(x)=\alpha_0$ και $\delta(x)=\beta_0$ με $\beta_0\neq 0$. Άρα $\Delta(x)=\alpha_0=\frac{\alpha_0}{\beta_0}\cdot\beta_0+0=\frac{\alpha_0}{\beta_0}\cdot\delta(x)+0(x)$, δηλαδή $\pi(x)=\frac{\alpha_0}{\beta_0}$ (σταθερό πολυώνυμο) και υ(x)=0(x).

ii) Έστω ότι <u>για κάθε</u> πολυώνυμο P(x) με βαθμ[P(x)]≤ν–1 υπάρχουν πολυώνυμα π(x) και υ(x) με P(x)=π(x)·δ(x)+υ(x), ώστε υ(x)=0(x) ή βαθμ[υ(x)]<βαθμ[π(x)]. Έστω ότι βαθμ[Δ(x)]=ν, δηλαδή $\Delta(x)=\alpha_0+\alpha_1x+\ldots+\alpha_\nu x^\nu$ με $\alpha_\nu\neq 0$. Τότε για το πολυώνυμο με τύπο $R(x)=\Delta(x)-\frac{\alpha_\nu}{\beta_\mu}x^{\nu-\mu}\cdot\delta(x)$ ισχύει ότι βαθμ[R(x)]≤ν–1.

Σύμφωνα με την υπόθεση της επαγωγής υπάρχουν πολυώνυμα $\pi_1(x)$ και υ(x) με υ(x)=0(x) ή βαθμ[υ(x)]<βαθμ[δ(x)], ώστε $R(x)=\delta(x)\cdot\pi_1(x)+\upsilon(x)$. Επομένως θα ισχύει ότι :

$$\delta(x)\cdot\pi_1(x)+\upsilon(x)=\Delta(x)-\frac{\alpha_\nu}{\beta_\mu}x^{\nu-\mu}\cdot\upsilon(x)\Leftrightarrow$$

$$\Delta(x)=\underbrace{[\pi_1(x)+\frac{\alpha_\nu}{\beta_\mu}x^{\nu-\mu}]}_{\pi(x)}\cdot\delta(x)+\upsilon(x).$$

Η επαγωγή εφαρμόστηκε πλήρως και το θεώρημα αποδείχτηκε ως προς την ύπαρξη των πολυωνύμων π(x) και υ(x). Παρακάτω θα δείξουμε τη μοναδικότητά τους:

Έστω ότι $\Delta(x)=\delta(x)\cdot\pi_1(x)+\upsilon_1(x)$ και $\Delta(x)=\delta(x)\cdot\pi_2(x)+\upsilon_2(x)$.

Τότε $\delta(x)\cdot\pi_1(x)+\upsilon_1(x)=\delta(x)\cdot\pi_2(x)+\upsilon_2(x)\Leftrightarrow \delta(x)\cdot[\pi_1(x)-\pi_2(x)]=\upsilon_2(x)-\upsilon_1(x)$.

Αν $\pi_1(x)-\pi_2(x)\neq 0(x)$, τότε σύμφωνα με την ιδιότητα 2 της πρώτης ενότητας θα ισχύει επίσης $\upsilon_2(x)-\upsilon_1(x)\neq 0(x)$ και μάλιστα $\beta\alpha\theta\mu[\upsilon_2(x)-\upsilon_1(x)]\geq\beta\alpha\theta\mu[\delta(x)]$. Αυτό όμως είναι αδύνατο διότι $\beta\alpha\theta\mu[\upsilon_2(x)-\upsilon_1(x)]\leq\max\{\beta\alpha\theta\mu[\upsilon_2(x)], \beta\alpha\theta\mu[\upsilon_1(x)]\}<\beta\alpha\theta\mu[\delta(x)]$ αν και εφόσον τα πολυώνυμα $\upsilon_2(x)$ και $\upsilon_1(x)$ είναι και τα δύο διάφορα από το μηδενικό. Αν τώρα ένα ακριβώς από τα δύο είναι ίσα με το μηδενικό (διότι δεν μπορούν και τα δύο να είναι ίσα με το 0(x)), τότε πάλι καταλήγουμε στην άτοπη ανισότητα $\beta\alpha\theta\mu[\upsilon_2(x)-\upsilon_1(x)]\leq \beta\alpha\theta\mu[\delta(x)]$. Άρα $\pi_1(x)=\pi_2(x)$ και τότε προκύπτει ότι $\upsilon_2(x)=\upsilon_1(x)$. Δηλαδή τα πολυώνυμα π(x) και υ(x) είναι μοναδικά. Η απόδειξη είναι πλήρης. ■

<u>Λήμμα 2.5:</u> Έστω $\rho_1, \rho_2,\ldots,\rho_\nu\in\mathbb{R}$, διαφορετικά ανά δύο μεταξύ τους. Τότε ισχύει η ισοδυναμία: $(x-\rho_1)\cdot(x-\rho_2)\cdot\ldots\cdot(x-\rho_\nu)\mid P(x)\Leftrightarrow (x-\rho_1)\mid P(x)$ και $(x-\rho_2)\mid P(x)$ και $\ldots(x-\rho_\nu)\mid P(x)$.

Απόδειξη: Για ν=2, η πρόταση έχει αποδειχτεί (λήμμα 2.4). Έστω ότι η πρόταση ισχύει για ν=κ, δηλαδή $(x-\rho_1)\cdot(x-\rho_2)\cdot\ldots\cdot(x-\rho_\kappa)\mid P(x)\Leftrightarrow (x-\rho_1)\mid P(x)$ και $(x-\rho_2)\mid P(x)$ και $\ldots(x-\rho_\kappa)\mid P(x)$. Τότε για ν=κ+1 έχουμε:

(α) Αν $(x-\rho_1)\cdot(x-\rho_2)\cdot\ldots\cdot(x-\rho_{\kappa+1})\mid P(x)$, τότε προφανώς ισχύει $(x-\rho_1)\mid P(x)$ και $(x-\rho_2)\mid P(x)$ και $\ldots(x-\rho_{\kappa+1})\mid P(x)$.

(β) Αντίστροφα, έστω ότι ισχύει $(x-\rho_1)\mid P(x)$ και $(x-\rho_2)\mid P(x)$ και $\ldots(x-\rho_{\kappa+1})\mid P(x)$. Επειδή $(x-\rho_1)\mid P(x)$ και $(x-\rho_2)\mid P(x)$ και $\ldots(x-\rho_\kappa)\mid P(x)$, τότε από την υπόθεση της επαγωγής θα ισχύει $P(x)=(x-\rho_1)\cdot(x-\rho_2)\cdot\ldots\cdot(x-\rho_\kappa)\cdot Q(x)$. Όμως $(x-\rho_{\kappa+1})\mid P(x)$ και άρα από το θεώρημα 2.3 έπεται ότι $P(\rho_{\kappa+1})=0\Rightarrow (\rho_{\kappa+1}-\rho_1)\cdot(\rho_{\kappa+1}-\rho_2)\cdot\ldots\cdot(\rho_{\kappa+1}-\rho_\kappa)\cdot Q(\rho_{\kappa+1})=0$. Επειδή οι αριθμοί $\rho_1, \rho_2,\ldots,\rho_{\kappa+1}$ είναι διαφορετικοί ανά δύο, συνεπάγεται ότι $Q(\rho_{\kappa+1})=0$. Άρα από το θεώρημα 2.3 θα έχουμε ότι $(x-\rho_{\kappa+1})\mid Q(x)\Rightarrow Q(x)=(x-\rho_{\kappa+1})\cdot Q_1(x)$.

Δηλαδή

$P(x)=(x-\rho_1)\cdot(x-\rho_2)\cdot\ldots\cdot(x-\rho_\kappa)\cdot Q(x)=(x-\rho_1)\cdot(x-\rho_2)\cdot\ldots\cdot(x-\rho_\kappa)\cdot(x-\rho_{\kappa+1})\cdot Q_1(x)$

Επομένως $(x-\rho_1)\cdot(x-\rho_2)\cdot\ldots\cdot(x-\rho_{\kappa+1}) \mid P(x)$ και το θεώρημα αποδείχτηκε πλήρως. ■

<u>**Θεώρημα 5.1:**</u> **Έστω η πολυωνυμική εξίσωση $\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_0=0$ με ακέραιους συντελεστές και $\alpha_\nu\neq 0$. Αν ο ρητός αριθμός $\frac{\kappa}{\lambda}\neq 0$ (όπου κ, $\lambda\in\mathbb{Z}$ με κ, λ πρώτοι μεταξύ τους και $\lambda\neq 0$) είναι ρίζα της πολυωνυμικής εξίσωσης, τότε ο κ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου α_o και ο λ είναι διαιρέτης του συντελεστή α_ν.**

Απόδειξη: Έστω ότι το ανάγωγο κλάσμα $\frac{\kappa}{\lambda}$ είναι ρίζα της πολυωνυμικής εξίσωσης. Τότε $\alpha_\nu \frac{\kappa^\nu}{\lambda^\nu}+\alpha_{\nu-1}\frac{\kappa^{\nu-1}}{\lambda^{\nu-1}}+\ldots+\alpha_o=0 \overset{\cdot\lambda^\nu}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow \alpha_\nu\kappa^\nu+\alpha_{\nu-1}\kappa^{\nu-1}\cdot\lambda+\ldots+\alpha_1\kappa\cdot\lambda^{\nu-1}+\alpha_o\cdot\lambda^\nu=0$ (1).

- Αν λύσουμε την (1) ως προς τον όρο $\alpha_o\cdot\lambda^\nu$, τότε παίρνουμε: $(1)\Leftrightarrow \alpha_o\cdot\lambda^\nu=\kappa\cdot\underbrace{\left(-\alpha_\nu\kappa^{\nu-1}-\alpha_{\nu-1}\kappa^{\nu-2}\cdot\lambda-\ldots-\alpha_1\lambda^{\nu-1}\right)}_{\rho}$. Επειδή η αρχική εξίσωση έχει ακέραιους συντελεστές, τότε έπεται ότι ο αριθμός ρ είναι ακέραιος. Επιπλέον από υπόθεση οι αριθμοί κ και λ είναι πρώτοι μεταξύ τους, άρα το ίδιο ισχύει και για τους αριθμούς κ και λ^ν. Αυτό σημαίνει ότι ο κ δεν διαιρεί το λ^ν, άρα αναγκαστικά διαιρεί τον αριθμό α_o.
- Αν λύσουμε την (1) ως προς τον όρο $\alpha_\nu\cdot\kappa^\nu$, τότε παίρνουμε: $(1)\Leftrightarrow \alpha_\nu\kappa^\nu=\lambda\underbrace{\left(-\alpha_{\nu-1}\kappa^{\nu-1}-\ldots-\alpha_1\kappa\cdot\lambda^{\nu-2}-\alpha_o\cdot\lambda^{\nu-1}\right)}_{\mu}$. Όμοια αριθμός μ είναι ακέραιος και επειδή οι αριθμοί κ και λ είναι πρώτοι μεταξύ τους έπεται ότι λ διαιρεί τον αριθμό α_ν. ■

<u>Θεώρημα 5.3:</u> Έστω η πολυωνυμική εξίσωση $\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_0=0$, με ρητούς συντελεστές. Αν ο άρρητος αριθμός $\alpha+\sqrt{\beta}$ (όπου α, β ρητοί με $\sqrt{\beta}$ άρρητο) είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε και ο αριθμός $\alpha-\sqrt{\beta}$ είναι επίσης ρίζα της εξίσωσης.

Απόδειξη: Πρώτα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι στη διαίρεση δύο πολυωνύμων με ρητούς συντελεστές προκύπτει ότι τόσο το πηλίκο όσο και το υπόλοιπο είναι επίσης πολυώνυμα με ρητούς συντελεστές. Πράγματι, οι συντελεστές του πηλίκου π(x) προκύπτουν με κατάλληλο πολλαπλασιασμό, ώστε ο μεγιστοβάθμιος όρος του Q(x) να γίνει ίσος με το μεγιστοβάθμιο όρο του P(x) ή του $\upsilon_1(x)$ ή του $\upsilon_2(x)$ αντίστοιχα μέχρι να φτάσουμε στο τελικό υπόλοιπο υ(x). Σε κάθε τέτοιο πολλαπλασιασμό, γίνονται πράξεις μεταξύ ρητών συντελεστών και άρα και τα αποτελέσματα αυτών των πράξεων δίνουν πολυώνυμα επίσης με ρητούς συντελεστές.

$$\begin{array}{llll|l} P(x) & & & & Q(x) \\ \cline{5-5} & \upsilon_1(x) & & & \pi(x) \\ & & \upsilon_2(x) & & \\ & & & \cdots & \\ & & & \upsilon(x) & \end{array}$$

Έστω τώρα ότι το πολυώνυμο P(x) με ρητούς συντελεστές έχει ρίζα τον αριθμό $\alpha+\sqrt{\beta}$. Θεωρούμε το πολυώνυμο $Q(x)=(x-\alpha-\sqrt{\beta})(x-\alpha+\sqrt{\beta})=x^2-2\alpha x+\alpha^2-\beta$. Παρατηρούμε ότι και το πολυώνυμο Q(x) έχει ρητούς συντελεστές και επομένως η διαίρεση αυτών θα δίνει υπόλοιπο με ρητούς συντελεστές. Έστω λοιπόν η ισότητα P(x)=Q(x)Π(x)+υ(x) με υ(x)=γx+δ, όπου γ και δ ρητοί αριθμοί. Τότε επειδή $P(\alpha+\sqrt{\beta})=0$ και $Q(\alpha+\sqrt{\beta})=0$ έπεται ότι $\upsilon(\alpha+\sqrt{\beta})=0\Leftrightarrow$

$\gamma\cdot(\alpha+\sqrt{\beta})+\delta=0\Leftrightarrow$ $(\gamma\cdot\alpha+\delta)+\gamma\cdot\sqrt{\beta}=0\Leftrightarrow$ $\gamma\cdot\alpha+\delta=-\gamma\cdot\sqrt{\beta}$. Αν $\gamma\neq0$, τότε $\sqrt{\beta}=\dfrac{\gamma\cdot\alpha+\delta}{-\gamma}$ ρητός, άτοπο από υπόθεση. Άρα γ=0 και τότε προκύπτει ότι και δ=0. Επομένως προκύπτει ότι P(x)=Q(x)Π(x) και άρα το P(x) έχει ρίζα και τον αριθμό $\alpha-\sqrt{\beta}$.

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Ανδρεαδάκης Στ., Κατσαργύρης Β., Παπασταυρίδης Στ. κ.α. (2012): *ΑΛΓΕΒΡΑ Β΄ΛΥΚΕΙΟΥ.* Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και εκδόσεων «Διόφαντος».
- Βάρσος Δ., Δεριζιώτης Δ. κ.α. (2005): Μια εισαγωγή στην Άλγεβρα. Εκδόσεις «Σοφία».
- Γκατζούλης Κώστας, Στράνης Κώστας (1998): Άλγεβρα Β΄ Λυκείου, Εκδόσεις «Γκατζούλη».
- Λεβέτας Αλκιβιάδης (1996). Άλγεβρα Β΄ Λυκείου, τόμος Ι. Αυτοέκδοση.
- Λουρίδας Ε. Σωτήρης (2006): Μαθηματικά για Εκπαιδευτικούς. Εκδόσεις «Μπόνια».
- Μπάρλας Αναστάσιος (2010): Άλγεβρα Β΄ Λυκείου, Εκδόσεις «Ελληνοεκδοτική».
- Ξένος Αθανάσιος (1998): Άλγεβρα Β΄ Λυκείου, Εκδόσεις «Ζήτη».
- Πάλλας Αριστείδης (1970): Μεγάλη Άλγεβρα Τόμος Β΄, Εκδόσεις «Παπαδημητρόπουλος».
- Σπανδάγος Ευάγγελος, Σουλτανοπούλου-Σπανδάγου Ελένη (;): Πολυώνυμα, Εκδόσεις «Παπαδημητρόπουλος».
- Στεργίου Χ., Νάκης Χ., Στεργίου Ι. (2012): Άλγεβρα Β΄ Λυκείου, Εκδόσεις «Σαββάλας».
- Τζουβάρας Θεόδωρος, Τζιρώνης Κώστας (1998): Άλγεβρα Β΄ Λυκείου, τόμος Ι. Εκδόσεις «Σαββάλας».
- Τσιγώνιας Αντώνης (2012): Πολυωνυμικές Εξισώσεις, Συστήματα Πολυωνυμικών Εξισώσεων, Διδακτικές Προεκτάσεις. (Διπλωματική εργασία).
  Πηγή:
  https://www.google.gr/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&cad=rja&uact=8&ved=0CB8QFjAA&url=http%3A%2F%2Fwww.math.uoa.gr%2Fme%2Fdipl%2Fdipl_Tsigonias%2520Antonis.pdf&ei=JDPOVIS5BoPuUtehgeAK&usg=AFQjCNFLMLM_AQ7fy6sVf4OgKukvAt8tyw&bvm=bv.85076809,d.d24