

Φυλλάδιο Ασκήσεων

Ασκήσεις στις Απόλυτες Τιμές (Γάξη Α' Λυκείου)

Στις ασκήσεις (1)-(2), να μετατρέψετε τις παραστάσεις σε ίσες, χωρίς να υπάρχει το σύμβολο της απόλυτης τιμής:

(1) α) $|\pi - 1|$ β) $|5 - \pi|$ γ) $|6 - 2\pi|$ ε) $|3e - 5|$, όπου $e \cong 2,718$.

(2) α) $|x^2 + 4|$ β) $|x^2 + 4x + 4|$ γ) $|2x - 1 - x^2|$

δ) $|4x^2 - 4x + 1| + |-2 - x^2|$.

(3) Αν $1 \leq x \leq 2$, να γράψετε χωρίς απόλυτα την παράσταση $A = |x - 1| + |x - 2|$.

(4) Αν $-1 < x < 2$, να γράψετε χωρίς απόλυτα την παράσταση $A = |-1 - x| + |x - 4| - |2x - 9|$.

(5) Αν $\alpha < 4 \leq \beta$, να γράψετε χωρίς απόλυτα την παράσταση $A = |3\alpha - 14| + |16 - 2\beta| + |\alpha - \beta - 3|$.

(6) Να γράψετε χωρίς απόλυτα τις παραστάσεις:

(i) $A = |x - 1| + |5 - x|$ (ii) $B = |2x - 8| - |3 - x|$

iii) $\Gamma = \frac{|x - 4|}{x - 4} + \frac{|3 - x|}{x - 3}$, όπου $x \neq 3$ και $x \neq 4$.

(7) Να γράψετε χωρίς απόλυτα την παράσταση $A = ||x| + x| - |x - |x||$.

(8) Να αποδείξετε ότι για κάθε δύο πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύουν οι παρακάτω ανισότητες:

α) $x^2 + 9 \geq 6|x|$ β) $4y^2 \geq 4|y| - 1$ γ) $x^2 + y^2 \geq -2|xy|$

δ) $|x| - 2 \geq -\frac{1}{|x|}$, $x \neq 0$.

(9) Δίνεται η παράσταση $A = \frac{x^2 - 16}{|x| - 4}$.

(α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ;

(β) Να απλοποιήσετε την παράσταση A .

(10) Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $|x - 1| = 4$

β) $|3x - 2| = 8$

γ) $|2x - 7| = -6$

δ) $|2x + 1| = |x - 1|$

ε) $|3x + 6| = |8 - 3x|$

στ) $5 \cdot |x - 1| = 2 \cdot |3 - 2x|$.

(11) Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $|x - 2| < 1$

β) $|3x - 1| \leq 5$

γ) $2 \cdot |2x - 1| \leq 18$

δ) $|7x + 6| \leq -2$

ε) $|2x - 3| - 8 < -2$

στ) $6 > 1 + |5x + 7|$

ζ) $-2 \cdot |x - 1| \geq -4$.

(12) Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $|x - 1| > 3$

β) $|2x - 3| \geq 5$

γ) $|5x - 7| \geq 18$

δ) $6 \leq |2x - 1|$

ε) $|3x - 8| > -7$

στ) $5 \leq |2x + 1| - 2$

ζ) $-5 \cdot |3x + 1| \leq -10$.

(13) Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $1 \leq |x - 1| \leq 3$

β) $2 \leq |3x + 2| < 4$

γ) $2 \leq |5 - 2x| \leq 7$

δ) $1 \leq \frac{|x - 3|}{2} \leq 6$.

(14) Να λύσετε τις ανισώσεις: α) $|x - 2| < |x + 3|$

β) $|2x - 6| \geq |4 - 2x|$.

(15) Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις και ανισώσεις:

α) $|x - y + 1| + |x - 2| = 0$

β) $|2x - y - 3| + |x + y - 1| = 0$

γ) $|3x - y - 8| + |y^3 - 2x^2 + 6| \geq 0$

δ) $|x^2 - 6x + 47| < -|x - 8|$

ε) $|x - y + 2| + |x - 1| > 0$.

(16) Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις και ανισώσεις:

$$\alpha) |2x - y + 3| + |x + y + 8| \leq 0 \quad \beta) |x - 2| + |3x + 9| = 0$$

$$\gamma) |x - 2|^3 = -|x + y - 2|^8 \quad \delta) 3 \cdot |x - 1| + 2 \cdot |y - 7| = 0.$$

(17) Αν $|\alpha| = 2$, $|\beta| = 3$ και $|\gamma| = 1$, να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) |\alpha + \beta| \leq 5 \quad \beta) |\alpha + \beta + \gamma| \leq 6 \quad \gamma) |2\alpha + \beta + \gamma| \leq 8$$

$$\delta) |\alpha - \beta + 2\gamma| \leq 7 \quad \epsilon) |3\alpha - \beta - 5\gamma| \leq 14.$$

(18) Αν $-1 \leq x \leq 1$ και $-2 \leq y \leq 2$, να αποδείξετε ότι $|x + 2y + 1| \leq 6$.

(19) Αν $|x - 1| \leq 4$ και $|y - 2| \leq 3$, να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) |x + y - 3| \leq 7 \quad \beta) |2x + y - 4| \leq 11 \quad \gamma) |x - y + 7| \leq 13$$

$$\delta) |2x - 3y - 4| \leq 25.$$

(20) Να δείξετε ότι για κάθε $x, y \in \mathbf{R}$ ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$\alpha) |x - y| \leq |x| + |y|.$$

Πότε ισχύει η παραπάνω σχέση ως ισότητα;

$$\beta) |x + y| \geq ||x| - |y||.$$

Πότε ισχύει η παραπάνω σχέση ως ισότητα;

$$\gamma) ||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|.$$

$$\delta) ||x| - |y|| \leq |x - y| \leq |x| + |y|.$$