Φυλλάδιο Ασκήσεων

Ασκήσεις στη Διάταξη Πραγματικών Αριθμών (Τάξη Α΄ Λυκείου)

(1) Έστω ότι $3<\alpha<5$. Να δείξετε ότι:

(i) $(\alpha-3)\cdot(\alpha-5)<0$ *και* (ii) $\alpha^2-8\alpha+15<0$.

(2) Έστω ότι $\alpha>-2$ *και* $\beta<5$. Να δείξετε ότι:

(i) $(\alpha+2)\cdot(\beta-5)<0$ *και* (ii) $\alpha\cdot\beta-10<5\alpha-2\beta$.

(3) Να δείξετε ότι: (i) $\alpha^2+4\geq 4\alpha$ *και* (ii) $\alpha^2-5\alpha+15\geq 5(\alpha-2)$.

(4) Αν $\alpha<\beta$, να δείξετε ότι (i) $\alpha<\frac{\alpha+\beta}{2}<\beta$ *και* (ii) $\alpha<\frac{2\alpha+\beta}{3}<\beta$.

(5) Να δείξετε ότι (i) $x^2-2x+2>0$ *και* (ii) $4x^2+3>4x$.

(6) Να βρείτε τους αριθμούς x και y, ώστε να ισχύει:

(i) $4x^2+y^2-4x+2y+2=0$ (ii) $x^2+4y^2+10x=2\cdot(6y-17)$.

(7) Να δείξετε ότι:

(i) $x^2+y^2-2(x-2y)+5\geq 0$ *και* (ii) $2\cdot(2x^2+y^2)\geq 2y(2x-1)-1$.

Πότε ισχύει η ισότητα σε κάθε μία από τις παραπάνω περιπτώσεις;

(8) Να δείξετε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό x και y ισχύουν ότι:

(i) $x^2+xy+y^2\geq 0$ *και* (ii) $x^2-xy+y^2\geq 0$.

Πότε ισχύει η ισότητα σε κάθε μία από τις παραπάνω περιπτώσεις;

(9) Αν ισχύει ότι $1<x<3$ *και* $2<y<8$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών περιέχονται οι παραστάσεις:

(i) $x+y$ (ii) $2x+3y$ (iii) $x\cdot y$ (iv) $x-y$ (v) $3x-2y$

(vi) $\frac{x}{y}$ (vii) $\frac{3x}{4y}$.

(10) Αν ισχύει ότι $2<x<5$ *και* $-4<y<-3$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών περιέχονται οι παραστάσεις:

(i) $x+y$ (ii) $x-2y$ (iii) $-x\cdot y$ (iv) $\frac{1}{y}$ (v) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ (vi) $\frac{-x}{2y}$.

(11) Αν $0 \leq \alpha < \beta$, να δείξετε ότι $\dfrac{\alpha}{1+\alpha} < \dfrac{\beta}{1+\beta}$.

(12) Αν α και β θετικοί αριθμοί, να δείξετε ότι $(\alpha+\beta)\cdot\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}\right) \geq 4$.

(13) Να συγκρίνετε τους αριθμούς 2^{34} και 5^{17}.

(14) Να συγκρίνετε τις παραστάσεις $2^{1503}\cdot 4^{501}$ και $5^{1503}\cdot 3^{501}$.

(15) Έστω α και β δύο θετικοί αριθμοί. Να δείξετε ότι:

(i) $\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha} \geq 2$ (ii) $\alpha+\dfrac{4}{\alpha} \geq 4$ (iii) $\left(\alpha+\dfrac{4}{\alpha}\right)\cdot\left(\beta+\dfrac{4}{\beta}\right) \geq 16$.