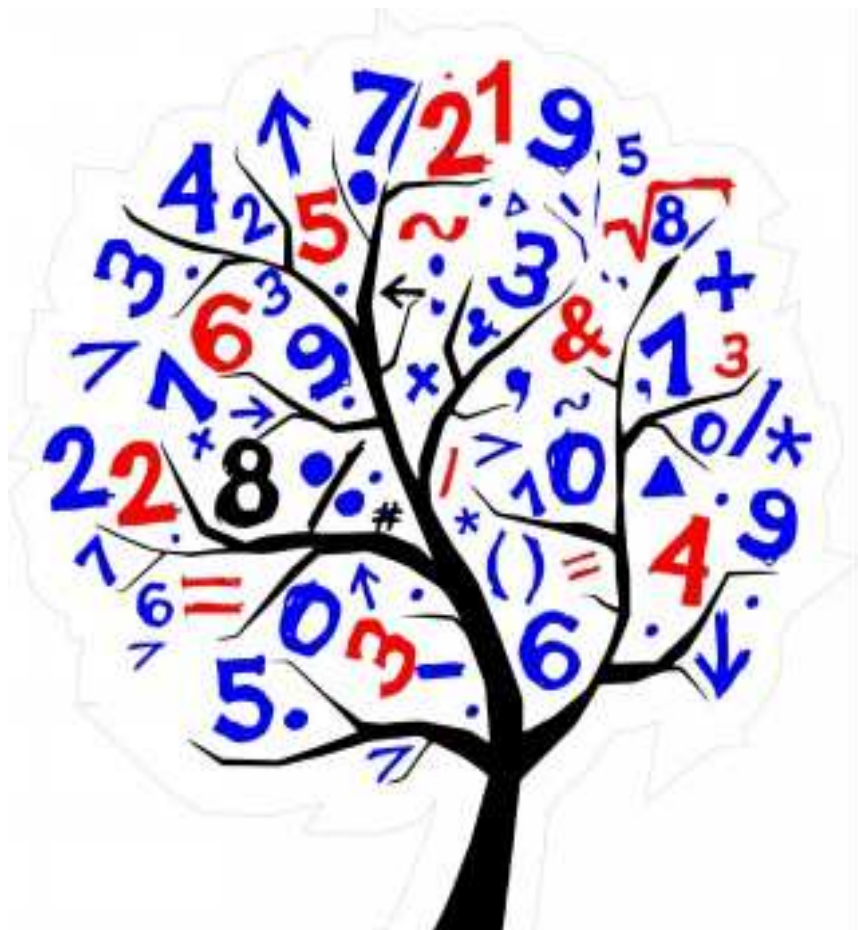


2^ο ΓΕΛ ΣΤΑΥΡΟΥΠΟΛΗΣ

ΣΧΟΛΙΚΟ ΕΤΟΣ 2016-2017

ΑΛΓΕΒΡΑ Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ



ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ : ΧΑΛΑΤΖΙΑΝ ΠΑΥΛΟΣ

ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΟΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥΣ

- **ΡΗΤΟΙ** λέγονται οι αριθμοί :

.....

- **ΟΙ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟΙ** αριθμοί είναι :

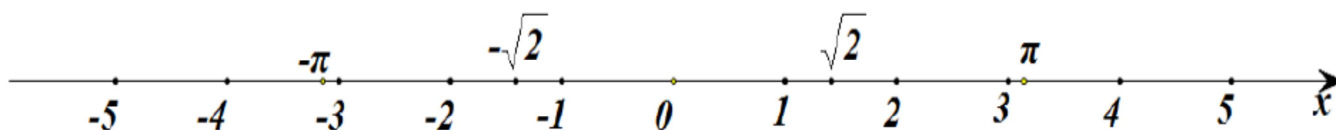
.....

- **ΑΡΡΗΤΟΙ** λέγονται οι αριθμοί:

.....

Για παράδειγμα άρρητοι είναι οι αριθμοί:.....

- **ΑΞΟΝΑΣ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ**



ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΡΟΣΘΕΣΗΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

- ΑΝΤΙΜΕΤΑΘΕΤΙΚΗ:.....
- ΠΡΟΣΕΤΑΙΡΙΣΤΙΚΗ:.....
- ΟΥΔΕΤΕΡΟ ΣΤΟΙΧΕΙΟ:.....
- ΑΝΤΙΘΕΤΟΣ ΑΡΙΘΜΟΥ:.....



Υπάρχει πραγματικός αριθμός με αντίθετο τον εαυτό του;.....

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

- ΑΝΤΙΜΕΤΑΘΕΤΙΚΗ:.....
- ΠΡΟΣΕΤΑΙΡΙΣΤΙΚΗ:.....
- ΟΥΔΕΤΕΡΟ ΣΤΟΙΧΕΙΟ:.....

- ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ ΑΡΙΘΜΟΥ:.....
- ΕΠΙΜΕΡΙΣΤΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ:.....



Ο αριθμός **δεν** έχει αντίστροφο!



Υπάρχει πραγματικός αριθμός με αντίστροφο τον εαυτό του;.....



Η αφαίρεση ορίζεται με τη βοήθεια της πρόσθεσης:.....



Η διαίρεση ορίζεται με τη βοήθεια του πολλαπλασιασμού:.....

ΑΛΛΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΠΡΑΞΕΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

- Μπορούμε να προσθέτουμε δύο (ή περισσότερες) ισότητες κατά μέλη.

$$\text{αν είναι } \begin{cases} \alpha = \beta \\ \gamma = \delta \end{cases} \text{ και τότε: } \dots\dots\dots$$

- Μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε δύο (ή περισσότερες) ισότητες κατά μέλη.

$$\text{αν είναι } \begin{cases} \alpha = \beta \\ \gamma = \delta \end{cases} \text{ και τότε: } \dots\dots\dots$$

- Μπορούμε στα δύο μέλη μιας ισότητας να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε τον ίδιο πραγματικό αριθμό. Δηλαδή: $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma = \beta + \gamma$

- Μπορούμε και τα δύο μέλη μιας ισότητας να τα πολλαπλασιάσουμε ή να τα διαιρέσουμε με τον ίδιο **μη μηδενικό αριθμό**. Δηλαδή :

$$\text{αν } \gamma \neq 0 \text{ τότε } \alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma$$

- Το γινόμενο δύο ή περισσότερων πραγματικών αριθμών είναι ίσο με το μηδέν αν και μόνον αν ένας τουλάχιστον από τους αριθμούς είναι ίσος με το μηδέν.

Δηλαδή αν είναι $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma = 0$ τότε:.....

- Το γινόμενο δύο ή περισσότερων πραγματικών αριθμών είναι διάφορο από το μηδέν αν και μόνον αν κανένας από τους αριθμούς δεν είναι ίσος με το μηδέν.

Δηλαδή αν είναι $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \neq 0$ τότε:.....



Προσοχή όταν διαγράφουμε από μια ισότητα της μορφής $\alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma$ τον παράγοντα γ πρέπει αυτός να είναι **διάφορος του μηδέν**!

ΔΥΝΑΜΕΙΣ

➤ Αν **a** πραγματικός αριθμός και **n** θετικός ακέραιος τότε ορίζουμε :

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{(n \text{ παράγοντες})} \quad \text{με } n > 1$$

$$a^1 = a$$

$$a^0 = 1 \quad , \quad \text{για κάθε } a \neq 0$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad , \quad a \neq 0$$



Δεν ορίζεται η δύναμη 0^0 .

Ιδιότητες Δυνάμεων

$$1. \quad a^n \cdot a^m = \dots\dots\dots$$

$$2. \quad \frac{a^n}{a^m} = \dots\dots\dots$$

$$3. \quad (a^n)^m = \dots\dots\dots$$

$$4. \quad a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$5. \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b} \right)^n \quad , \quad b \neq 0$$



Ισχύει ότι : $1^n = 1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1 = 1$, $(-1)^n = \begin{cases} 1 & , \text{ αν } n \text{ άρτιος} \\ -1 & , \text{ αν } n \text{ περιττός} \end{cases}$



Ισχύει πάντα η συνεπαγωγή: $a = b \Rightarrow a^n = b^n$ (γιατί;)

Το αντίστροφο όμως δεν ισχύει πάντα!

Δηλαδή αν είναι $a^n = b^n$ τότε όχι αναγκαία $a = b$ (γιατί;)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

$$1. \quad (2a^2b^3c) \cdot (-3ab^4c^3) = \dots\dots\dots$$

$$2. \quad (2ab^3)^3 \cdot (3a^2b)^2 = \dots\dots\dots$$

$$3. \quad \frac{(4a^2b^3)^2}{(2ab^3)^3} = \dots\dots\dots$$

$$4. \frac{2\alpha^2\beta}{3\gamma^3} \cdot \frac{9\alpha^3}{\beta^3\gamma^2} \cdot \left(\frac{\beta}{2\alpha^2\gamma^{-2}}\right)^2 = \dots\dots\dots$$

$$5. \left(\frac{2\beta^{-2}}{\alpha^{-3}}\right)^2 : \left(\frac{2^{-1}\beta}{\alpha}\right)^{-3} = \dots\dots\dots$$

$$6. (\alpha\beta^2\gamma^{-1})^3 \cdot (\alpha^2\beta^{-1}\gamma)^{-2} = \dots\dots\dots$$

ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

- ΟΡΙΣΜΟΣ:.....
.....

$$1. (\alpha + \beta)^2 = \dots\dots\dots$$

$$2. (\alpha - \beta)^2 = \dots\dots\dots$$

$$(-\alpha + \beta)^2 = \dots\dots\dots$$

$$(-\alpha - \beta)^2 = \dots\dots\dots$$

$$3. (\alpha + \beta)^3 = \dots\dots\dots$$

$$4. (\alpha - \beta)^3 = \dots\dots\dots$$

$$5. (\alpha + \beta) \cdot (\alpha - \beta) = \dots\dots\dots \quad (\text{διαφορά τετραγώνων})$$

$$6. \alpha^3 - \beta^3 = (\quad) \cdot (\quad) \quad (\text{διαφορά κύβων})$$

$$7. \alpha^3 + \beta^3 = (\quad) \cdot (\quad) \quad (\text{άθροισμα κύβων})$$

$$8. (\alpha + \beta + \gamma)^2 = \dots\dots\dots$$

$$9. (\alpha + \beta - \gamma)^2 = \dots\dots\dots$$

$$10. (\alpha - \beta - \gamma)^2 = \dots\dots\dots$$

ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ

➤ Ευθεία Απόδειξη

Παράδειγμα 1^ο : Να αποδειχθεί η ταυτότητα $(\alpha^2 + \beta^2)(x^2 + y^2) - (\alpha x + \beta y)^2 = (\alpha y - \beta x)^2$

Απόδειξη:

- 1^ο μέλος : $(\alpha^2 + \beta^2)(x^2 + y^2) - (\alpha x + \beta y)^2 =$

Παράδειγμα 2^ο : αν $\alpha + \beta + \gamma = 0$ τότε $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$ (Ταυτότητα υπό συνθήκη)

Απόδειξη:

Παράδειγμα 3^ο

Αν είναι $\alpha + \beta + \gamma = 6$ να δειχθεί ότι: $(3 - \alpha)^2 + (3 - \beta)^2 + (3 - \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 9$

Απόδειξη

➤ **Μέθοδος της Απαγωγής σε Άτοπο**

Παράδειγμα: Να αποδειχθεί ότι ένας ρητός αριθμός (ρ) και ένας άρρητος αριθμός (α) δίνουν άθροισμα νέο άρρητο.

Απόδειξη:

ΜΕΘΟΔΟΣ ΓΙΑ ΔΙΑΔΟΧΙΚΟΥΣ ΑΚΕΡΑΙΟΥΣ

- Αν είναι α, β, γ διαδοχικοί ακέραιοι τότε συνήθως τους θέτουμε: $\beta-1, \beta, \beta+1$
- Αν είναι $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ διαδοχικοί ακέραιοι τότε συνήθως τους θέτουμε : $\alpha, \alpha+1, \alpha+2, \alpha+3$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1^ο

Αν οι αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ είναι διαδοχικοί ακέραιοι τότε να δειχθεί ότι: $\beta\gamma - \alpha\delta = 2$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2^ο

Αν α και β διαδοχικοί ακέραιοι να δειχθεί ότι η παράσταση $\alpha^2 + \beta^2 + \alpha^2\beta^2$ είναι τετράγωνο ακεραίου.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3^ο

Αν οι αριθμοί α , β , γ είναι διαδοχικοί ακέραιοι να δειχθεί ότι $\alpha^3 + \gamma^3 = 2\beta(\beta^2 + 3)$

ΛΥΣΗ

ΜΕΘΟΔΟΣ ΓΙΑ ΑΡΤΙΟΥΣ – ΠΕΡΙΤΤΟΥΣ

- Αν α ένας άρτιος αριθμός τότε η μορφή του είναι $\alpha = 2 \cdot \kappa$, $\kappa \in \mathbb{Z}$
Αντίστροφα αν ένας αριθμός α μπορεί να πάρει τη μορφή $\alpha = 2 \cdot \kappa$, $\kappa \in \mathbb{Z}$, τότε ο α είναι άρτιος αριθμός.
- Αν α ένας περιττός αριθμός τότε η μορφή του είναι $\alpha = 2 \cdot \kappa + 1$, $\kappa \in \mathbb{Z}$
Αντίστροφα αν ένας αριθμός α μπορεί να πάρει τη μορφή $\alpha = 2 \cdot \kappa + 1$, $\kappa \in \mathbb{Z}$, τότε ο α είναι περιττός αριθμός.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να αποδειχθεί ότι το τετράγωνο ενός περιττού αριθμού είναι επίσης περιττός .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Αν το άθροισμα των ψηφίων ενός τριψήφιου αριθμού είναι πολλαπλάσιο του 3 να δειχθεί ότι και ο τριψήφιος είναι πολλαπλάσιο του 3.

ΛΥΣΗ

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ ΜΕ ΤΗ ΒΟΗΘΕΙΑ ΤΑΥΤΟΤΗΤΩΝ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1^ο

Αν είναι $\alpha + \beta = 5$ και $\alpha\beta = -2$ να υπολογιστούν οι τιμές των παραστάσεων:

$$A = \alpha^2 + \beta^2 \quad B = \alpha^3 + \beta^3 \quad \Gamma = \alpha^4 + \beta^4 \quad \Delta = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$$

ΛΥΣΗ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2^ο

Αν είναι $\alpha + \frac{1}{\alpha} = 3$ να υπολογιστούν οι τιμές των παραστάσεων:

$$A = \alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} \quad B = \alpha^3 + \frac{1}{\alpha^3} \quad \Gamma = \alpha^4 + \frac{1}{\alpha^4} \quad \Delta = \alpha^2 - 3\alpha$$

ΛΥΣΗ

ΑΝΑΛΟΓΙΕΣ

➤ ΟΡΙΣΜΟΣ:.....

Στην αναλογία $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, $\beta, \delta \neq 0$

- Οι όροι α και γ λέγονται:.....
- Οι όροι β και δ λέγονται:.....
- Οι όροι α και δ λέγονται:.....
- Οι όροι β και γ λέγονται:.....

Ιδιότητες Αναλογιών

1. $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma$, $(\beta, \delta \neq 0)$
2. $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$, $(\beta, \gamma, \delta \neq 0)$
3. $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha + \beta}{\beta} = \frac{\gamma + \delta}{\delta}$, $(\beta, \delta \neq 0)$
4. $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}$, $(\beta, \delta, \beta + \delta \neq 0)$

Βασική μέθοδος για ασκήσεις με ανάλογα ποσά.

Παράδειγμα 1^ο : Τρία αδέρφια ο Άρης (10 ετών) , ο Βασίλης (8 ετών) και η Γεωργία (7 ετών) πρόκειται να μοιραστούν ένα χρηματικό ποσό 700 € ανάλογα με την ηλικία τους. Να βρεθεί το ποσό που αναλογεί στον καθένα.

Λύση:

Παράδειγμα 2° : Οι γωνίες Α , Β και Γ ενός τριγώνου ΑΒΓ είναι ανάλογες με τους αριθμούς 3 , 7 και 8 αντίστοιχα. Να βρεθούν οι γωνίες.

Λύση:

Παράδειγμα 3° :

Έστω ότι $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta}$, $\alpha, \beta \neq 0$. Ναδειχθεί ότι $\frac{x-2y}{\alpha-2\beta} = \frac{4x+3y}{4\alpha+3\beta}$, $(\alpha-2\beta), (4\alpha+3\beta) \neq 0$

Λύση:

ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να απλοποιηθεί η παράσταση :

$$\left[\left(\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\beta} + 2\alpha \right) \cdot \frac{\alpha^2 - \beta^2}{(\alpha + \beta)^2} \right] : \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha} \right)$$

ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΣ:.....

.....

.....

ΒΑΣΙΚΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ

- αν $\alpha > 0$ και $\beta > 0$ τότε $\alpha + \beta > 0$
- αν $\alpha < 0$ και $\beta < 0$ τότε $\alpha + \beta < 0$
- αν α, β ομόσημοι τότε $\alpha \cdot \beta > 0$ και $\frac{\alpha}{\beta} > 0$
- αν α, β ετερόσημοι τότε $\alpha \cdot \beta < 0$ και $\frac{\alpha}{\beta} < 0$
- Για κάθε πραγματικό αριθμό a ισχύει: $a^2 \geq 0$

Πότε ισχύει η ισότητα;.....

- Αν είναι $a^2 + b^2 = 0$ τότε
- Αν είναι $a^2 + b^2 > 0$ τότε

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ

1. Αν είναι $a > b$ και $b > \gamma$ τότε θα είναι και $a > \gamma$ (μεταβατική ιδιότητα)
2. Μπορούμε στα δύο μέλη μιας ανισότητας να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε τον ίδιο πραγματικό αριθμό. Δηλαδή: $a > b \Leftrightarrow a + \gamma > b + \gamma$
3. Μπορούμε και τα δύο μέλη μιας ανισότητας να τα πολλαπλασιάσουμε ή να τα διαιρέσουμε με τον ίδιο **θετικό αριθμό και η φορά της να μην αλλάξει** .
Δηλαδή : αν $\gamma > 0$ τότε $a > b \Leftrightarrow a \cdot \gamma > b \cdot \gamma$
4. Μπορούμε και τα δύο μέλη μιας ανισότητας να τα πολλαπλασιάσουμε ή να τα διαιρέσουμε με τον ίδιο **αρνητικό αριθμό και η φορά της να αλλάξει** .
Δηλαδή : αν $\gamma < 0$ τότε $a > b \Leftrightarrow a \cdot \gamma < b \cdot \gamma$
5. Για τους θετικούς αριθμούς a, b και τον θετικό ακέραιο n ισχύει η ισοδυναμία:
 $a > b \Leftrightarrow a^n > b^n$

6. Για τους θετικούς αριθμούς α , β και τον θετικό ακέραιο n ισχύει η ισοδυναμία:

$$\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha^n = \beta^n$$

7. Μπορώ να προσθέτω ομόστροφες ανισότητες κατά μέλη.

$$\text{Δηλαδή αν είναι } \begin{cases} \alpha > \beta \\ \gamma > \delta \end{cases} \text{ και τότε:}$$

8. Μπορώ να πολλαπλασιάζω ομόστροφες ανισότητες κατά μέλη όταν όλοι οι όροι τους είναι θετικοί.

$$\text{Δηλαδή αν είναι } \begin{cases} \alpha > \beta \\ \gamma > \delta \end{cases} \text{ και } \alpha, \beta, \gamma, \delta > 0 \text{ τότε:}$$

9. Αν α και β ομόσημοι τότε ισχύει $\alpha < \beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}$

(δηλαδή μπορούμε να αντιστρέψουμε τους όρους μιας ανισότητας με ομόσημους όρους και η φοράς της να αλλάξει)



Ποτέ δεν αφαιρούμε ούτε διαιρούμε ανισότητες κατά μέλη έστω και αν είναι ομόστροφες!

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1^η (Εφαρμογή της ιδιότητας : $\alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ και } \beta = 0$)

1. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α και β για τους οποίους ισχύει:

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y + 13 = 0$$

ΛΥΣΗ

2. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α και β για τους οποίους ισχύει:

$$4\alpha^2 + 9\beta^2 + 12\alpha - 6\beta + 10 = 0$$

ΛΥΣΗ

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2^Η (Απόδειξη ανισότητας)

Να αποδειχθεί ότι : $(\alpha^2 + \beta^2)(x^2 + y^2) \geq (\alpha x + \beta y)^2$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3^Η (Απόδειξη ανισότητας)

Να αποδειχθεί ότι : $2\alpha^2 + 2\alpha + 1 > 0$, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4^Η (Απόδειξη ανισότητας)

Να αποδειχθεί ότι : $\alpha^2 - 6\alpha + 10 > 0$, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 5^Η (Απόδειξη ανισότητας)

Να δειχθεί ότι : $\alpha^2 + \alpha + 1 > 0$, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 6^Η (Απόδειξη ανισότητας)

Να αποδειχθεί ότι : $\alpha + \frac{1}{\alpha} \geq 2$, για κάθε $\alpha > 0$. Πότε ισχύει η ισότητα;

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 7^Η (Άσκηση Μέθοδος)

Αν για τους αριθμούς α και β ισχύουν $1 < \alpha < 2$ και $3 < \beta < 4$, να βρεθούν τα όρια των τιμών των παραστάσεων:

$$A = 3\alpha + 2\beta \quad , \quad B = \alpha^2 + \beta^2 \quad , \quad \Gamma = 5\alpha - 2\beta \quad , \quad \Delta = \alpha \cdot \beta + 3\alpha - 5 \quad , \quad E = \frac{\alpha - 1}{\beta}$$

ΛΥΣΗ

- $1 < \alpha < 2 \stackrel{\cdot 3}{\Leftrightarrow}$
- $3 < \beta < 4 \stackrel{\cdot 2}{\Leftrightarrow}$

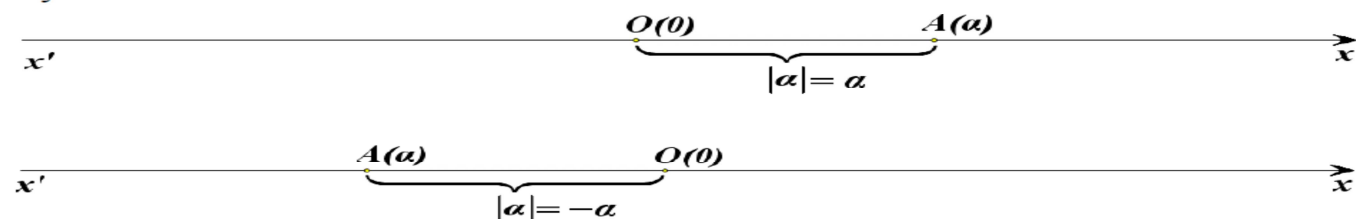
- $1 < \alpha < 2 \Leftrightarrow$
- $3 < \beta < 4 \Leftrightarrow$

- $1 < \alpha < 2 \stackrel{\cdot 5}{\Leftrightarrow}$
- $3 < \beta < 4 \stackrel{\cdot (-2)}{\Leftrightarrow}$

- $1 < \alpha < 2 \Leftrightarrow$
- $3 < \beta < 4 \Leftrightarrow$

ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

Θεωρούμε έναν αριθμό a που παριστάνεται με το σημείο A πάνω σε έναν άξονα.



$$|5| = \dots\dots\dots, \quad |-3| = \dots\dots\dots, \quad |\sqrt{2}| = \dots\dots\dots, \quad |-\sqrt{5}| = \dots\dots\dots, \quad \left|\frac{2}{3}\right| = \dots\dots\dots, \quad \left|-\frac{1}{2}\right| = \dots\dots\dots$$

- Η απόλυτη τιμή ενός θετικού αριθμού είναι
Δηλαδή αν $a > 0$ τότε $|a| =$
- Η απόλυτη τιμή ενός αρνητικού αριθμού είναι
Δηλαδή αν $a < 0$ τότε $|a| =$
- Η απόλυτη τιμή του 0 είναι: $|0| =$

ΟΡΙΣΜΟΣ:.....
.....
.....

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{αν } a \geq 0 \\ -a, & \text{αν } a < 0 \end{cases}$$

- $|\sqrt{5} - 2| = \dots\dots\dots$
- $|\sqrt{3} - 2| = \dots\dots\dots$
- $|\sqrt{7} - 3| = \dots\dots\dots$

ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΤΟΥ ΟΡΙΣΜΟΥ

- $|a| = |-a| \geq 0$
- $|a| \geq a$ και $|a| \geq -a$
- $|a|^2 = a^2$

Αν $\theta > 0$, τότε:

- $|x| = \theta \Leftrightarrow x = \theta \text{ ή } x = -\theta$
- $|x| = |a| \Leftrightarrow x = a \text{ ή } x = -a$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΑΠΟΛΥΤΩΝ ΤΙΜΩΝ

1. $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

ΓΕΝΙΚΑ ΙΣΧΥΕΙ: $|\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_n| =$

Επίσης είναι : $|\alpha^n| =$

2. $\frac{|\alpha|}{|\beta|} = \left| \frac{\alpha}{\beta} \right|, \quad \beta \neq 0$

3. $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Η ισότητα ισχύει όταν

.....

ΓΕΝΙΚΑ ΙΣΧΥΕΙ : $|\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n| \leq$

ΕΞΑΓΩΓΗ ΑΠΟΛΥΤΩΝ ΤΙΜΩΝ

ΔΡΑΣΤΗΡΙΩΤΗΤΑ 1^Η : Να γραφεί χωρίς απόλυτες τιμές η παράσταση

$$A = |\alpha - 5| + |\alpha - 6| - 3|\alpha - 7| + 2|\alpha - 3| \quad , \quad \text{αν } 5 < \alpha < 6$$

- $5 < \alpha < 6$
- $5 < \alpha < 6$
- $5 < \alpha < 6$
- $5 < \alpha < 6$

Άρα είναι :

ΔΡΑΣΤΗΡΙΩΤΗΤΑ 2^Η : Να γραφεί χωρίς απόλυτες τιμές η παράσταση

$$A = |\pi - 3| + |\pi - 4| - |\sqrt{5} - \sqrt{3}| + |\sqrt{3} - \sqrt{5}|$$

- $|\pi - 3| =$
- $|\pi - 4| =$
- $|\sqrt{5} - \sqrt{3}| =$
- $|\sqrt{3} - \sqrt{5}| =$

Άρα είναι $A =$

ΔΡΑΣΤΗΡΙΩΤΗΤΑ 3^Η : Να γραφεί χωρίς απόλυτες τιμές η παράσταση $A = \frac{|\alpha|}{\alpha} - \frac{|\beta|}{\beta}$ για τις

διάφορες τιμές των μη μηδενικών αριθμών α και β .

ΛΥΣΗ

- Αν $\alpha > 0$ και $\beta > 0$ τότε $A = \text{---} - \text{---} =$
- Αν $\alpha > 0$ και $\beta < 0$ τότε $A = \text{---} - \text{---} =$
- Αν $\alpha < 0$ και $\beta > 0$ τότε $A = \text{---} - \text{---} =$
- Αν $\alpha < 0$ και $\beta < 0$ τότε $A = \text{---} - \text{---} =$

ΔΡΑΣΤΗΡΙΩΤΗΤΑ 4^Η : Να γραφεί χωρίς απόλυτες τιμές η παράσταση

$$A = |\alpha^2 + \pi| - |\alpha^2 - 4\alpha + 4| + |\pi - 4|$$

- $|\alpha^2 + \pi| =$
- $|\alpha^2 - 4\alpha + 4| =$
- $|\pi - 4| =$

Άρα είναι $A =$

ΔΡΑΣΤΗΡΙΩΤΗΤΑ 5^Η : Να γραφεί χωρίς απόλυτες τιμές η παράσταση

$$A = 2|x - 3| - |x^2 - 2x + 1|$$

- $|x^2 - 2x + 1| =$
- $|x - 3| = \begin{cases} & , \alpha \nu \\ & , \alpha \nu \end{cases}$

Άρα είναι $A = \begin{cases} \end{cases}$

👁️ Λαμβάνοντας υπόψη ότι $|\alpha| \geq 0$ και $|\beta| \geq 0$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Πότε ισχύει η ισότητα $|\alpha| + |\beta| = 0$;

Πότε ισχύει η ανισότητα $|\alpha| + |\beta| > 0$;

ΕΦΑΡΜΟΓΗ Να βρεθούν οι αριθμοί α και β αν είναι $|2\alpha - \beta| + |\alpha + \beta - 6| = 0$

ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΑ

1. Το σύνολο των πραγματικών αριθμών x με $\alpha \leq x \leq \beta$, λέγεται **διάστημα από α μέχρι β** και συμβολίζεται με $[\alpha, \beta]$.

Γραφική απεικόνιση



2. Το σύνολο των πραγματικών αριθμών x με $\alpha < x < \beta$, λέγεται **διάστημα από α μέχρι β** και συμβολίζεται με (α, β) .

Γραφική απεικόνιση



- Οι αριθμοί **α** και **β** λέγονται των διαστημάτων αυτών και κάθε αριθμός μεταξύ των α και β λέγεται αυτών.

3. Το σύνολο των πραγματικών αριθμών x με $\alpha < x \leq \beta$, λέγεται **διάστημα** και συμβολίζεται με $(\alpha, \beta]$.

Γραφική απεικόνιση



4. Το σύνολο των πραγματικών αριθμών x με $\alpha \leq x < \beta$, λέγεται **διάστημα** και συμβολίζεται με $[\alpha, \beta)$.

Γραφική απεικόνιση



5. Το σύνολο των πραγματικών αριθμών x με $x \leq \alpha$, συμβολίζεται με $(-\infty, \alpha]$.

Γραφική απεικόνιση



6. Το σύνολο των πραγματικών αριθμών x με $x < \alpha$, συμβολίζεται με $(-\infty, \alpha)$.

Γραφική απεικόνιση



7. Το σύνολο των πραγματικών αριθμών x με $x \geq \alpha$, συμβολίζεται με $[\alpha, +\infty)$.

Γραφική απεικόνιση



8. Το σύνολο των πραγματικών αριθμών x με $x > \alpha$, συμβολίζεται με $(\alpha, +\infty)$.

Γραφική απεικόνιση



- Τα σύμβολα $-\infty$ και $+\infty$ διαβάζονται «**συν άπειρο**» και «**πλην άπειρο**» αντίστοιχα και **δεν** παριστάνουν πραγματικούς αριθμούς.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΩΤΗΤΑ 1^Η

Να παραστήσετε γραφικά τα παρακάτω σύνολα πραγματικών αριθμών και να γράψετε τα αντίστοιχα διαστήματα.

1. $-2 \leq x \leq 5$ διάστημα :



2. $0 < x < 6$ διάστημα :



3. $-3 < x < 0$ ή $2 < x < 7$ διάστημα :



4. $-1 \leq x \leq 1$ ή $x > 3$

διάστημα :

x'

x



5. $x \leq 0$ ή $2 < x \leq 5$

διάστημα :

x'

x



6. $x < -2$ ή $x > 2$

διάστημα :

x'

x



7. $x \leq 5$ και $x > -4$

διάστημα :

x'

x



8. $x < 1$ και $x \geq -2$

διάστημα :

x'

x



9. $-3 \leq x < 4$ και $-2 < x \leq 6$

διάστημα :

x'

x



10. $x \leq 0$ και $-3 < x \leq 5$

διάστημα :

x'

x



ΔΡΑΣΤΗΡΙΩΤΗΤΑ 2^Η

Να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης Α με ένα μόνο στοιχείο της στήλης Β.

ΣΤΗΛΗ Α		ΣΤΗΛΗ Β	
1	$-3 < x < 3$	Α	$x \in [-3, 3)$
2	$x \leq -3$ ή $x > 3$	Β	$x \in (-3, 3]$
3	$-3 \leq x < 3$	Γ	$x \in (-3, 3)$
4	$x < -3$ ή $x > 3$	Δ	$x \in [-3, 3]$
5	$-3 < x \leq 3$	Ε	$x \in (-\infty, -3] \cup (3, +\infty)$
6	$x \leq -3$ ή $x \geq 3$	ΣΤ	$x \in (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$
7	$x < -3$ ή $x \geq 3$	Ζ	$x \in (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$
8	$-3 \leq x \leq 3$	Η	$x \in (-\infty, -3) \cup [3, +\infty)$

1	2	3	4	5	6	7	8

ΔΡΑΣΤΗΡΙΩΤΗΤΑ 3^Η

Να γράφουν με τη μορφή διαστήματος ή ένωσης διαστημάτων οι παρακάτω εκφράσεις :

1	$-1 < x < 5$	
2	$x \leq -2$ ή $x > 0$	
3	$4 \leq x < 8$	
4	$x < 2$ ή $x > 5$	
5	$-3 < x \leq -1$	
6	$x \leq 0$ ή $x \geq 6$	
7	$x < -4$ ή $x \geq -2$	
8	$3 \leq x \leq 13$	
9	$x \leq -3$ και $-6 < x \leq 3$	

ΔΡΑΣΤΗΡΙΩΤΗΤΑ 4^Η

Να γραφούν με ανισότητες οι παρακάτω σχέσεις :

1	$x \in [-1, 3)$	
2	$x \in (-\infty, -1] \cup (2, +\infty)$	
3	$x \in (2, 7]$	
4	$x \in (-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$	
5	$x \in (-4, -1)$	
6	$x \in (-\infty, -4] \cup [0, +\infty)$	
7	$x \in [-5, 5]$	
8	$x \in (-\infty, 4) \cup [8, +\infty)$	
9	$x \in (-2, 0) \cup [2, 4]$	
10	$x \in (-3, 2] \cup [5, 10)$	

ΔΡΑΣΤΗΡΙΩΤΗΤΑ 5^Η

Να γράψετε όλους τους ακέραιους αριθμούς που περιέχονται στο διάστημα $[-3, 2)$

.....

Να γράψετε όλους τους ακέραιους αριθμούς που περιέχονται στο διάστημα $(-5, 3]$

.....

Να γράψετε όλους τους ακέραιους αριθμούς που περιέχονται στην ένωση των διαστημάτων :

$$(-4, -1) \cup (2, 6)$$

.....

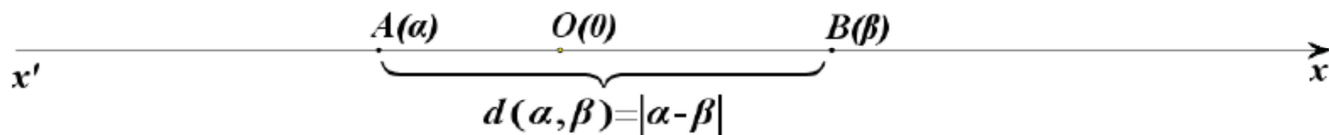
Να γράψετε όλους τους ακέραιους αριθμούς που περιέχονται στην ένωση των διαστημάτων :

$$[-1, 1] \cup (2, 4)$$

.....

ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΔΥΟ ΑΡΙΘΜΩΝ

Έστω δύο αριθμοί α και β που παριστάνονται πάνω στον άξονα με τα σημεία **A** και **B** αντιστοίχως .



- Το μήκος του τμήματος AB λέγεται **απόσταση** των αριθμών α και β και συμβολίζεται με $d(\alpha, \beta)$.
- Προφανώς είναι $d(\alpha, \beta) = d(\beta, \alpha) \Leftrightarrow |\alpha - \beta| = |\beta - \alpha|$
- Στην περίπτωση όπου είναι $\alpha < \beta$ η απόσταση των αριθμών α και β είναι $d(\alpha, \beta) = \beta - \alpha$ και λέγεται **μήκος** του διαστήματος $[\alpha, \beta]$.
- Έστω ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ και έστω **A** και **B** τα σημεία που παριστάνουν τα άκρα α και β αντίστοιχα. Αν είναι M το μέσον του τμήματος AB τότε ο αριθμός που αντιστοιχεί στο M είναι : και λέγεται του $[\alpha, \beta]$.
Ο αριθμός λέγεται του διαστήματος $[\alpha, \beta]$.



- Ως μήκος , κέντρο και ακτίνα των διαστημάτων (α, β) , $(\alpha, \beta]$ και $[\alpha, \beta)$ ορίζουμε το μήκος το κέντρο και την ακτίνα του $[\alpha, \beta]$.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΩΤΗΤΑ 1^Η

Να βρεθεί το μήκος το κέντρο και η ακτίνα των παρακάτω διαστημάτων :

ΔΙΑΣΤΗΜΑ	ΜΗΚΟΣ	ΚΕΝΤΡΟ	ΑΚΤΙΝΑ
$[-3, 3]$			
$[-2, 8]$			
$(-7, -1)$			
$(2, 10]$			
$[-4, 7)$			
$[-3, 6)$			

ΔΡΑΣΤΗΡΙΩΤΗΤΑ 2^Η

Να βρεθούν οι παρακάτω αποστάσεις :

1. $d(-4, 5) = \dots\dots\dots$

2. $d(-7, -2) = \dots\dots\dots$

3. $d(3, 11) = \dots\dots\dots$

4. $d(-8, 2) = \dots\dots\dots$

5. $d(9, 3) = \dots\dots\dots$

6. $d(-3, -13) = \dots\dots\dots$

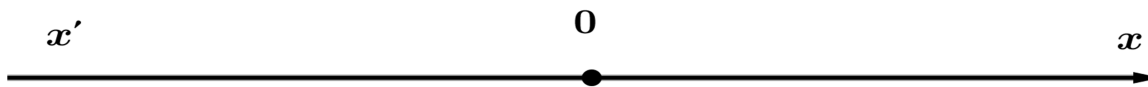
ΔΡΑΣΤΗΡΙΩΤΗΤΑ 3^Η

Να βρεθούν οι τιμές του αριθμού x για τις οποίες ισχύει :

1	$d(x, 3) = 4$	2	$d(x, -2) = 5$
3	$d(x, 2) = 7$	4	$d(x, -1) = 1$
5	$d(x, -2) = d(x, 8)$	6	$d(x, 2) = d(x, -6)$

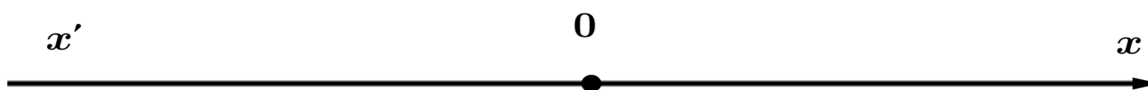
ΔΡΑΣΤΗΡΙΩΤΗΤΑ 4^Η

1. Να βρεθούν οι αριθμοί x για τους οποίους ισχύει : $d(x, 0) < 4$



Γενικά αν θ ένας **θετικός** αριθμός είναι : $d(x, 0) < \theta \Leftrightarrow |x| \dots \Leftrightarrow \dots$

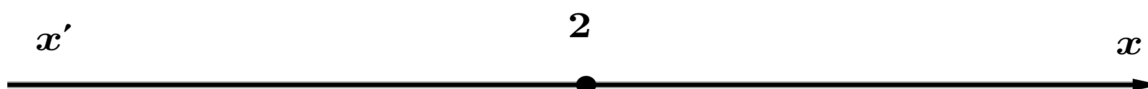
2. Να βρεθούν οι αριθμοί x για τους οποίους ισχύει : $d(x, 0) > 5$



Γενικά αν θ ένας **θετικός** αριθμός είναι : $d(x, 0) > \theta \Leftrightarrow |x| \dots \Leftrightarrow \dots$

3. Να βρεθούν οι αριθμοί x για τους οποίους ισχύει : $d(x, 2) < 6$

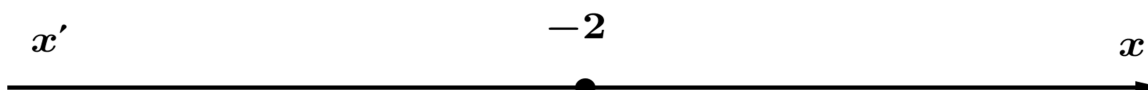
Γραφική επίλυση:



Αλγεβρική επίλυση :

4. Να βρεθούν οι αριθμοί x για τους οποίους ισχύει : $d(x, -2) > 3$

Γραφική επίλυση:



Αλγεβρική επίλυση :

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑΣ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΕΣ ΤΙΜΕΣ

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1^Η: Να αποδειχθεί ότι: $\alpha \cdot |\beta| + \beta \cdot |\alpha| \leq \alpha \cdot \beta + |\alpha \cdot \beta|$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2^Η: Να δειχθεί ότι: $|\alpha\beta| \leq \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}$

Έπειτα να δειχθεί ότι αν $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ και $x^2 + y^2 = 1$ τότε ισχύει $|\alpha x + \beta y| \leq 1$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3^Η

Αν είναι $|x| \leq 2$ και $|y| \leq 3$ να δειχθεί ότι: i) $|3x + 2y| \leq 12$ ii) $|3x + 2y - 5| \leq 17$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΕΣ ΤΙΜΕΣ

Στηρίζομαστε κυρίως στις γνωστές ιδιότητες:

$$|x| = \theta \Leftrightarrow x = \theta \text{ ή } x = -\theta \quad (1) \quad \text{και} \quad |x| = |y| \Leftrightarrow x = y \text{ ή } x = -y \quad (2) \quad , \quad \text{όπου } \theta \text{ θετικός αριθμός.}$$

1. Να λυθεί η εξίσωση : $|2x+3|=9$

Σύμφωνα με την ιδιότητα (1) έχουμε :

- ή $2x+3=9 \Leftrightarrow 2x=6 \Leftrightarrow x=\frac{6}{2} \Leftrightarrow \boxed{x=3}$
- ή $2x+3=-9 \Leftrightarrow 2x=-12 \Leftrightarrow x=\frac{-12}{2} \Leftrightarrow \boxed{x=-6}$

Ομοίως να λυθεί η εξίσωση : $|2x-11|=3$

- ή
- ή

2. Να λυθεί η εξίσωση : $|2x-9|=|x+3|$

Σύμφωνα με την ιδιότητα (2) έχουμε :

- ή $2x-9=x+3 \Leftrightarrow 2x-x=9+3 \Leftrightarrow \boxed{x=12}$
- ή $2x-9=-x-3 \Leftrightarrow 2x+x=9-3 \Leftrightarrow 3x=6 \Leftrightarrow x=\frac{6}{3} \Leftrightarrow \boxed{x=2}$

Ομοίως να λυθεί η εξίσωση : $|3x-15|=2 \cdot |x-5|$

- ή
- ή

3. Να λυθεί η εξίσωση : $||x|-5|=4$

- ή $|x|-5=4 \Leftrightarrow |x|=9 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{ή } x=9 \\ \text{ή } x=-9 \end{cases}$
- ή $|x|-5=-4 \Leftrightarrow |x|=1 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{ή } x=1 \\ \text{ή } x=-1 \end{cases}$

4. Να λυθεί η εξίσωση : $||x-2|-3|=7$

- $|x-2|-3=7 \Leftrightarrow |x-2|=10 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{ή } x-2=10 \Leftrightarrow x=12 \\ \text{ή } x-2=-10 \Leftrightarrow x=-8 \end{cases}$
- $|x-2|-3=-7 \Leftrightarrow |x-2|=-4$ (αδύνατη)

Ομοίως να λυθεί η εξίσωση : $||2x-1|-4|=3$

- ή
- ή

5. Να λυθεί η εξίσωση : $\frac{|x+3|+5}{2} - \frac{|x+3|-3}{6} = \frac{|x+3|+1}{4} + 3$

Πολλαπλασιάζουμε όλους τους όρους της εξίσωσης με το ΕΚΠ των παρονομαστών που είναι το 12 ώστε να γίνει απαλοιφή των παρονομαστών και ισοδύναμα έχουμε :

$$\begin{aligned} 12 \cdot \frac{|x+3|+5}{2} - 12 \cdot \frac{|x+3|-3}{6} &= 12 \cdot \frac{|x+3|+1}{4} + 12 \cdot 3 \\ \Leftrightarrow 6 \cdot (|x+3|+5) - 2 \cdot (|x+3|-3) &= 3 \cdot (|x+3|+1) + 36 \\ \Leftrightarrow 6|x+3|+30 - 2|x+3|+6 &= 3|x+3|+3+36 \\ \Leftrightarrow 6|x+3|-2|x+3|-3|x+3| &= 3+36-6-30 \\ \Leftrightarrow |x+3|=3 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{ή } x+3=3 \Leftrightarrow x=0 \\ \text{ή } x+3=-3 \Leftrightarrow x=-6 \end{cases} \end{aligned}$$

6. Να λυθεί η εξίσωση $|3x-5|=x-1$

Επειδή οι απόλυτες τιμές είναι μη αρνητικοί αριθμοί θα πρέπει αρχικά να θέσουμε τον περιορισμό : $x-1 \geq 0 \Leftrightarrow \boxed{x \geq 1}$

$$\text{Τότε έχουμε : } |3x-5|=x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{ή } 3x-5=x-1 \Leftrightarrow 2x=4 \Leftrightarrow \boxed{x=2} \text{ δεκτή} \\ \text{ή } 3x-5=-x+1 \Leftrightarrow 4x=6 \Leftrightarrow x=\frac{6}{4} \Leftrightarrow \boxed{x=\frac{3}{2}} \text{ δεκτή} \end{cases}$$

Ομοίως να λυθεί η εξίσωση : $|2x + 7| = x + 5$

7. Να λυθεί η εξίσωση : $|x - 5| \cdot |x + 3| = 2 \cdot |x - 5|$

Έχουμε ισοδύναμα :

$$|x - 5| \cdot |x + 3| = 2 \cdot |x - 5| \Leftrightarrow$$

$$|x - 5| \cdot |x + 3| - 2 \cdot |x - 5| = 0 \Leftrightarrow$$

$$|x - 5| \cdot (|x + 3| - 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{ή } |x - 5| = 0 \Leftrightarrow x - 5 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = 5} \\ \text{ή } |x + 3| - 2 = 0 \Leftrightarrow |x + 3| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{ή } x + 3 = 2 \Leftrightarrow \boxed{x = -1} \\ \text{ή } x + 3 = -2 \Leftrightarrow \boxed{x = -5} \end{cases} \end{cases}$$

8. Να λυθεί η εξίσωση : $|x^2 - 4| + |2x - x^2| = 0$

ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΝΙΣΩΣΕΩΝ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΕΣ ΤΙΜΕΣ

Στηριζόμαστε κυρίως στις γνωστές ιδιότητες:

$$|x| \leq \theta \Leftrightarrow -\theta \leq x \leq \theta \quad (1) \quad \text{και} \quad |x| \geq \theta \Leftrightarrow x \geq \theta \quad \text{ή} \quad x \leq -\theta \quad (2) \quad \text{όπου } \theta \text{ θετικός αριθμός.}$$

1. Να λυθεί η ανίσωση : $|2x + 5| \leq 11$

Σύμφωνα με την ιδιότητα (1) έχουμε :

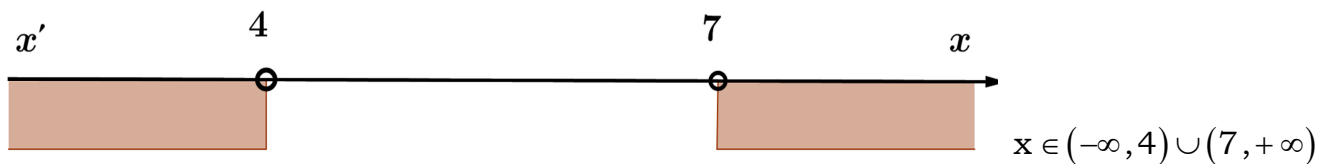
$$|2x + 5| \leq 11 \Leftrightarrow -11 \leq 2x + 5 \leq 11 \Leftrightarrow \overset{-5}{-16} \leq 2x \leq \overset{+2 \times 0}{6} \Leftrightarrow -8 \leq x \leq 3$$



2. Να λυθεί η ανίσωση : $|2x - 11| > 3$

Σύμφωνα με την ιδιότητα (2) έχουμε :

$$|2x - 11| > 3 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{ή } 2x - 11 > 3 \Leftrightarrow 2x > 14 \Leftrightarrow x > 7 \\ \text{ή } 2x - 11 < -3 \Leftrightarrow 2x < 8 \Leftrightarrow x < 4 \end{cases}$$



3. Να λυθεί η ανίσωση $||x + 2| - 6| < 5$

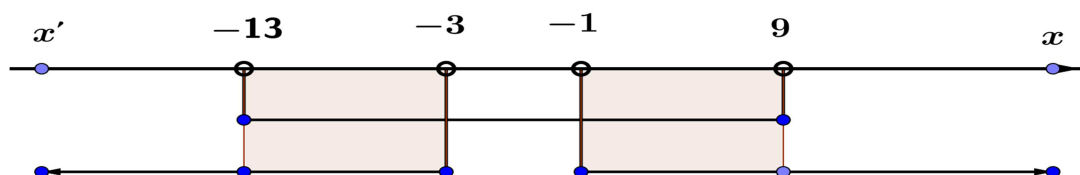
$$||x + 2| - 6| < 5 \Leftrightarrow -5 < |x + 2| - 6 < 5 \overset{+6}{\Leftrightarrow} 1 < |x + 2| < 11$$

$$\bullet \quad |x + 2| < 11 \Leftrightarrow -11 < x + 2 < 11 \overset{-2}{\Leftrightarrow} -13 < x < 9$$

Και

$$\bullet \quad |x + 2| > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{ή } x + 2 > 1 \Leftrightarrow x > -1 \\ \text{ή } x + 2 < -1 \Leftrightarrow x < -3 \end{cases}$$

$$\text{ΣΥΝΑΛΛΗΘΕΥΣΗ : } x \in (-13, -3) \cup (-1, 9)$$



4. Να λυθεί η ανίσωση : $1 < |2x+1| \leq 7$

Η διπλή ανίσωση « σπάει » σε δύο απλές .

- $|2x+1| \leq 7$

- $|2x+1| > 1$

ΣΥΝΑΛΗΘΕΥΣΗ



5. Να λυθεί η ανίσωση : $\frac{|5-2x|+5}{2} - \frac{|2x-5|+1}{4} \leq \frac{|2x-5|-3}{6} + 3$

Πολλαπλασιάζουμε όλους τους όρους της εξίσωσης με το ΕΚΠ των παρονομαστών που είναι το 12 ώστε να γίνει απαλοιφή των παρονομαστών και ισοδύναμα έχουμε :



ΡΙΖΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΡΙΖΑΣ :

.....

.....

Άρα ισχύει : $\sqrt{\alpha} = x \Leftrightarrow x^2 = \alpha$, $\alpha \geq 0$, $x \geq 0$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΡΙΖΑΣ

- $\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$
- $\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha \cdot \beta}$
- $\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$

☞ Ισχύει για κάθε μη αρνητικό αριθμό **a** ότι :

$$(\sqrt{\alpha})^2 = \alpha$$

☞ Γενικά δεν ισχύει $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha + \beta}$
(σε ποια περίπτωση ισχύει;)

ΔΡΑΣΤΗΡΙΩΤΗΤΑ 1^Η : Βασικές τετραγωνικές ρίζες

$\sqrt{\quad} = 0$	$\sqrt{\quad} = 1$	$\sqrt{\quad} = 2$
$\sqrt{\quad} = 3$	$\sqrt{\quad} = 4$	$\sqrt{\quad} = 5$
$\sqrt{\quad} = 6$	$\sqrt{\quad} = 7$	$\sqrt{\quad} = 8$
$\sqrt{\quad} = 9$	$\sqrt{\quad} = 10$	$\sqrt{\quad} = 11$
$\sqrt{\quad} = 12$	$\sqrt{\quad} = 13$	$\sqrt{\quad} = 14$
$\sqrt{\quad} = 15$	$\sqrt{\quad} = 16$	$\sqrt{\quad} = 17$
$\sqrt{\quad} = 18$	$\sqrt{\quad} = 19$	$\sqrt{400} =$
$\sqrt{900} =$	$\sqrt{1600} =$	$\sqrt{2500} =$
$\sqrt{625} =$	$\sqrt{0,16} =$	$\sqrt{0,09} =$
$\sqrt{1,44} =$	$\sqrt{2,25} =$	$\sqrt{0,0001} =$

ΔΡΑΣΤΗΡΙΩΤΗΤΑ 2^Η : Απλοποίηση ριζικού

$\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot \sqrt{2}$	$\sqrt{12} =$
$\sqrt{18} =$	$\sqrt{27} =$
$\sqrt{32} =$	$\sqrt{48} =$
$\sqrt{50} =$	$\sqrt{75} =$
$\sqrt{72} =$	$\sqrt{300} =$
$\sqrt{98} =$	$\sqrt{20} =$
$\sqrt{200} =$	$\sqrt{45} =$
$\sqrt{450}$	$\sqrt{80} =$
$\sqrt{28} =$	$\sqrt{125} =$
$\sqrt{63} =$	$\sqrt{500} =$

ΔΡΑΣΤΗΡΙΩΤΗΤΑ 3^Η : Ρητοποίηση του παρονομαστή κλάσματος

$\frac{2}{\sqrt{10}} = \frac{2 \cdot \sqrt{10}}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{10}} = \frac{2 \cdot \sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{10}}{5}$
$\frac{5}{\sqrt{5}} = \text{————} =$
$\frac{6}{\sqrt{3}} = \text{————} =$
$\frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{2 \cdot (\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \frac{2 \cdot (\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5})^2 - 1^2} = \frac{2 \cdot (\sqrt{5}+1)}{4} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$
$\frac{3}{\sqrt{10}+1} = \text{————} =$

$$\frac{10}{\sqrt{7} + \sqrt{2}} = \frac{\quad}{\quad} =$$

$$\frac{9}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} = \frac{\quad}{\quad} =$$

$$\frac{2}{3 - \sqrt{5}} = \frac{\quad}{\quad} =$$

ΔΡΑΣΤΗΡΙΩΤΗΤΑ 4^Η παραστάσεις με ριζικά και μεταβλητό υπόριζο.

Να βρεθούν οι τιμές του x για τις οποίες ορίζεται η παράσταση

$$A = (\sqrt{x+2} + \sqrt{x-4})(\sqrt{x+2} - \sqrt{x-4})$$

Και να δειχθεί ότι $A = 6$.

ΛΥΣΗ

ΔΡΑΣΤΗΡΙΩΤΗΤΑ 5^Η υπολογισμός παραστάσεων με ριζικά.

1. Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης : $A = \sqrt{(\sqrt{11}-3)^2} + \sqrt{(\sqrt{11}-4)^2}$

- $\sqrt{(\sqrt{11}-3)^2} =$

- $\sqrt{(\sqrt{11}-4)^2} =$

- Άρα είναι : $A = \sqrt{(\sqrt{11}-3)^2} + \sqrt{(\sqrt{11}-4)^2} =$

2. Αν είναι $3 < x < 5$ να βρεθεί η τιμή της παράστασης : $A = \sqrt{x^2 - 10x + 25} + \sqrt{x^2 - 6x + 9}$

- $\sqrt{x^2 - 10x + 25} =$

- $\sqrt{x^2 - 6x + 9} =$

- $A = \sqrt{x^2 - 10x + 25} + \sqrt{x^2 - 6x + 9} =$

3. Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης : $B = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{11} + \sqrt{7}} + \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{11} - \sqrt{7}}$

4. Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης $(A - B)(A + B)$ όπου :

$$A = 3\sqrt{12} - 2\sqrt{27} - \sqrt{48} \quad \text{και} \quad B = 3\sqrt{20} - 2\sqrt{45} - \sqrt{80}$$

5. Να απλοποιηθεί η παράσταση : $A = 2 \cdot (2\sqrt{3} + 3)^2 - (\sqrt{7} - 3)(\sqrt{7} + 3) + (\sqrt{3} - 2)^2$

6. Να απλοποιηθεί η παράσταση : $A = \sqrt{14 - 6\sqrt{5}} + \sqrt{9 - 4\sqrt{5}}$

- $\sqrt{14 - 6\sqrt{5}} =$

- $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} =$

- Άρα είναι $A = \sqrt{14 - 6\sqrt{5}} + \sqrt{9 - 4\sqrt{5}} =$

ΟΡΙΣΜΟΣ ν-ΣΤΗΣ ΡΙΖΑΣ :

Άρα ισχύει : $\sqrt[n]{\alpha} = x \Leftrightarrow x^n = \alpha$, $\alpha \geq 0$, $x \geq 0$

ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΟΡΙΣΜΟΥ

- Αν $\alpha \geq 0$, τότε:

$$\left(\sqrt[n]{\alpha}\right)^n = \alpha \quad \text{και} \quad \sqrt[n]{\alpha^n} = \alpha$$

- Αν $\alpha \leq 0$ και ν άρτιος, τότε:

$$\sqrt[n]{\alpha^n} = |\alpha|.$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ν-στης ΡΙΖΑΣ

Αν $\alpha, \beta \geq 0$, τότε:

1. $\sqrt[n]{\alpha} \cdot \sqrt[n]{\beta} = \sqrt[n]{\alpha \cdot \beta}$
2. $\frac{\sqrt[n]{\alpha}}{\sqrt[n]{\beta}} = \sqrt[n]{\frac{\alpha}{\beta}}$ (εφόσον $\beta \neq 0$)
3. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{\alpha}} = \sqrt[mn]{\alpha}$
4. $\sqrt[n]{\alpha^{\mu\rho}} = \sqrt[n]{\alpha^{\mu}}^{\rho}$

ΔΡΑΣΤΗΡΙΩΤΗΤΑ 1^Η

Να υπολογιστούν οι ρίζες και να αιτιολογηθεί το αποτέλεσμα.

$\sqrt[3]{1} = \dots\dots\dots$ διότι:	$\sqrt[3]{8} = \dots\dots\dots$ διότι:	$\sqrt[3]{125} = \dots\dots\dots$ διότι:
$\sqrt[4]{1} = \dots\dots\dots$ διότι:	$\sqrt[3]{27} = \dots\dots\dots$ διότι:	$\sqrt[4]{16} = \dots\dots\dots$ διότι:
$\sqrt[5]{1} = \dots\dots\dots$ διότι:	$\sqrt[3]{64} = \dots\dots\dots$ διότι:	$\sqrt[4]{81} = \dots\dots\dots$ διότι:
$\sqrt[4]{16} = \dots\dots\dots$ διότι:	$\sqrt[4]{625} = \dots\dots\dots$ διότι:	$\sqrt[5]{243} = \dots\dots\dots$ διότι:

ΔΡΑΣΤΗΡΙΩΤΗΤΑ 2^Η

Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης :

$$A = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{7} - \sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{7} + \sqrt{3}} =$$

ΔΡΑΣΤΗΡΙΩΤΗΤΑ 3^Η

Να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$A = \sqrt[4]{\alpha^3 \sqrt{\alpha} \sqrt{\alpha}} =$$

ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΜΕ ΕΚΘΕΤΗ ΡΗΤΟ

ΟΡΙΣΜΟΣ

Αν $a > 0$, μ ακέραιος και ν θετικός ακέραιος, τότε ορίζουμε:

$$a^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{a^{\mu}}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

$2^{\frac{1}{2}} =$	$4^{\frac{1}{3}} =$	$2^{\frac{3}{2}} =$
$2^{-\frac{1}{2}} =$	$3^{-\frac{2}{3}} =$	$5^{-\frac{3}{4}} =$

ΔΡΑΣΤΗΡΙΩΤΗΤΑ 4^Η

Να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$A = \frac{\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt[4]{\alpha^3} \cdot \sqrt[3]{\alpha^2}}{\sqrt[6]{\alpha} \cdot \sqrt[12]{\alpha^5}} =$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Να αποδειχθεί η ταυτότητα: $(\alpha+1)^3 - (\alpha-1)^3 = (\alpha-1)^2 + (\alpha+1)^2 + 4\alpha^2$

Να αποδειχθεί η ταυτότητα: $(\alpha+\beta+\gamma)^2 + (\alpha-\beta)^2 + (\beta-\gamma)^2 + (\gamma-\alpha)^2 = 3(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$

Αν είναι $\alpha + \beta + \gamma = 0$, $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$ να δειχθεί ότι : $\alpha\left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right) + \beta\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma}\right) + \gamma\left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha}\right) = -3$

Να γίνουν οι πράξεις:

$$A) \left(\frac{1}{\alpha^3} - \frac{2}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha} \right) \cdot \frac{\alpha^3 + \alpha^2}{(\alpha-1)^2} \quad \left(\Lambda\pi: \frac{\alpha-1}{\alpha} \right)$$

$$B) \frac{1}{\alpha^2 + \alpha} + \frac{\alpha}{\alpha-1} - \frac{2}{\alpha^2 - 1} - 1 \quad \left(\Lambda\pi: \frac{1}{\alpha} \right)$$

$$Γ) \left(\alpha + \beta - \frac{2\alpha\beta}{\alpha + \beta} \right) : \left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} + \frac{\beta}{\alpha} \right) \quad (\Lambda\pi: \alpha)$$

Αν είναι $\alpha + \beta = 5$ και $\alpha\beta = 6$ να υπολογιστούν οι τιμές των παραστάσεων:

$$A = \alpha^2 + \beta^2, \quad B = \alpha^3 + \beta^3, \quad \Gamma = \alpha^4 + \beta^4$$

Αν είναι $\alpha + \frac{1}{\alpha} = 5$, $\alpha \neq 0$ να υπολογιστούν οι τιμές των παραστάσεων:

$$A = \alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2}, \quad B = \alpha^3 + \frac{1}{\alpha^3}, \quad \Gamma = \alpha^4 + \frac{1}{\alpha^4}$$

Αν το άθροισμα των ψηφίων ενός τριψήφιου αριθμού είναι πολλαπλάσιο του 9 να δειχθεί ότι και ο τριψήφιος είναι πολλαπλάσιο του 9.

Αν είναι $\alpha - \beta = -4$ και $\alpha\beta = 5$ να υπολογιστούν οι τιμές των παραστάσεων:

$$A = \alpha^2 + \beta^2 \quad B = \alpha^3 - \beta^3 \quad \Gamma = \alpha^4 + \beta^4 \quad \Delta = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}$$

Αν είναι $\alpha - \frac{1}{\alpha} = 5$ να υπολογιστούν οι τιμές των παραστάσεων:

$$A = \alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} \quad B = \alpha^3 - \frac{1}{\alpha^3} \quad \Gamma = \alpha^4 + \frac{1}{\alpha^4} \quad \Delta = \alpha^2 - 5\alpha$$

Να αποδειχθεί ότι :

$$\text{Αν } x + y + w = 6 \text{ τότε } (3-x)^2 + (3-y)^2 + (3-w)^2 + 9 = x^2 + y^2 + w^2$$

Να δειχθεί ότι: $(3-x)^3 + (5-x)^3 + (2x-8)^3 = 3(3-x)(5-x)(2x-8)$

Να λυθεί η εξίσωση: $(3-x)^3 + (5-x)^3 + (2x-8)^3 = 0$

Να δειχθεί ότι: $(x^2+4)(y^2+9) = (xy+6)^2 + (3x-2y)^2$

Αν είναι $\alpha+\beta+\gamma=0$ να δειχθεί ότι: $\frac{\alpha^2-\beta^2-2\beta\gamma}{\alpha+\beta} + \frac{\beta^2-\gamma^2-2\alpha\gamma}{\beta+\gamma} + \frac{\gamma^2-\alpha^2-2\beta\alpha}{\alpha+\gamma} = 0$

Αν οι αριθμοί α και β είναι θετικοί και ισχύει $\alpha + \beta = 1$, να δειχθεί ότι $\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \geq 9$

Αν ισχύει $\alpha + \beta = 1$, να δειχθεί ότι $\alpha\beta \leq \frac{1}{4}$ και $\alpha^2 + \beta^2 \geq \frac{1}{2}$

Να δειχθεί ότι για όλους τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ ισχύει: $\alpha^4 + \beta^4 \geq \alpha^3\beta + \alpha\beta^3$

Πότε ισχύει η ισότητα;

Να δειχθεί ότι για όλους τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ ισχύει:

$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \geq \alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma$ Πότε ισχύει η ισότητα;

Έστω $\alpha > \beta > 0$. Να αποδειχθεί ότι: $\alpha^3 - \beta^3 > (\alpha - \beta)^3$

Αν είναι $\alpha \geq -3$ να αποδειχθεί ότι $\alpha^3 + 27 \geq 3\alpha^2 + 9\alpha$

Αν είναι $\alpha < 2 < \beta$ να αποδειχθεί ότι $2(\alpha + \beta) \geq 4 + \alpha\beta$

Αν α θετικός αριθμός να δειχθεί ότι $(\alpha + 2)\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2}\right) \geq 4$

Αν είναι $0 < \alpha < 3$ να αποδειχθεί ότι $\alpha < \frac{6\alpha}{\alpha+3} < 3$

Να δειχθεί ότι $2(\alpha^2 + 9) \geq (\alpha + 3)^2$ Πότε ισχύει η ισότητα;

Να δειχθεί ότι $3\alpha^2 - 4\alpha + 4 > 0$

Να δειχθεί ότι $\alpha^2 + 4\beta^2 + 5 \geq 4(\alpha - \beta)$ Πότε ισχύει η ισότητα;

Να δείξετε ότι ισχύει: $(\alpha - \beta)^2 + 8\beta^2 \geq 4\alpha\beta$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Να δειχθεί ότι $9\alpha^2 - 12\alpha + 5 > 0$

Αν είναι $\alpha \geq -3$ να αποδειχθεί ότι $\frac{\alpha}{9} - \frac{3}{\alpha^2} \geq \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{3}$

Αν είναι $\alpha - 2\beta = 2$ να αποδειχθεί ότι: i) $1 + 2\alpha\beta \geq 0$ ii) $\alpha^2 + 4\beta^2 \geq 2$

Αν είναι $1 < \alpha < 3$ και $2 < \beta < 4$ να βρεθεί μεταξύ ποιών αριθμών περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

i) $A = 2\alpha + 3\beta$ ii) $B = 2\alpha^2 + \beta^2 - 3$ iii) $\Gamma = 3\alpha - 2\beta + 1$ iv) $\Delta = \frac{2\alpha - \beta}{\alpha + 2}$

Αν είναι $\alpha + \beta + \gamma \geq 0$ να αποδειχθεί ότι $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 \geq 3\alpha\beta\gamma$ Πότε ισχύει η ισότητα;

Αν είναι $\alpha > 2$ και $\beta > 2$ να αποδειχθεί ότι $\alpha\beta > \alpha + \beta$

Αν x, y, z θετικοί αριθμοί να δειχθεί ότι $(x^2 + 1)(y^2 + 1)(z^2 + 1) \geq 8xyz$

Αν $0 < \alpha, \beta, \gamma < 1$ να δειχθεί ότι: i) $(1 - \alpha)(1 - \beta) > 1 - \alpha - \beta$ ii) $(1 - \alpha)(1 - \beta)(1 - \gamma) > 1 - \alpha - \beta - \gamma$

Να δειχθεί ότι $(\alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \delta^2) \geq (\alpha\gamma + \beta\delta)^2$

Να δειχθεί ότι $(\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma)^2 \geq 3\alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma)$

Αν α, β, γ θετικοί αριθμοί να δειχθεί ότι $(\alpha + \beta + \gamma)\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right) \geq 9$

Αν είναι $\alpha > 0$ να δειχθεί ότι $\alpha^3 + \frac{1}{\alpha^3} \geq \alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2}$

Αν α, β, γ θετικοί αριθμοί να δειχθεί ότι $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 \geq 3\alpha\beta\gamma$

Έπειτα να δειχθεί ότι $\frac{\alpha^3}{\beta^3} + \frac{\beta^3}{\gamma^3} + \frac{\gamma^3}{\alpha^3} \geq 3$

Να αποδειχθεί ότι: $(\alpha + 5)\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{5}\right) \geq 4$ όπου α ένας θετικός αριθμός

Να βρεθούν οι αριθμοί α και β αν ισχύει: $\alpha^2 + \beta^2 + 10\alpha - 4\beta + 29 = 0$

Να βρεθούν οι αριθμοί α και β αν ισχύει: $\alpha^2 + \beta^2 - 6\alpha + 8\beta + 25 = 0$

Δίνεται ότι $2 < \alpha < 3$ και $1 < \beta < 2$ να βρεθεί μεταξύ ποιών αριθμών βρίσκονται οι τιμές των

παραστάσεων: $A = 5\alpha + 3\beta$ $B = \beta^2 - 2\alpha$ $\Gamma = \frac{\alpha - 1}{\beta + 2}$

Αν $\alpha < \beta < \gamma$ να απλοποιηθεί η παράσταση: $A = 4|\alpha - \beta - 1| - 2|a - \gamma - 2| - 3|\gamma - \beta + 2|$

Αν είναι $|\alpha| \leq 2$ και $|\beta| \leq 3$ να αποδειχθεί ότι :

A) $|2\alpha + 3\beta| \leq 13$

B) $|5\alpha - 2\beta + 1| \leq 17$

Να λυθούν οι εξισώσεις

i) $|2x-5|=7$ ii) $|2x+1|=2|x-5|$ iii) $|x+2|=2|x-4|$

Να λυθούν οι εξισώσεις

i) $\frac{2|x|+1}{5} - \frac{|x|-2}{2} = \frac{3|x|+4}{10}$ ii) $\frac{2|x-3|+1}{3} - \frac{|x-3|-4}{6} = \frac{|x-3|}{2} - 1$

iii) $\frac{2|x-2|+1}{3} - \frac{|x-2|-1}{6} = \frac{|2-x|+3}{2} - 1$

Να λυθούν οι εξισώσεις

i) $|2|x|-5|=3$ ii) $|3|x+1|=2||x|+5|$ iii) $3|x^2-2|=2|x^2+5|$

Να λυθούν οι εξισώσεις

i) $|2x-5|=x-2$ ii) $|2x+1|=x+1$ iii) $2|x+3|=1-x$

Να λυθούν οι εξισώσεις

i) $|x+2|=2-|x-4|$ ii) $|x+1|=|x|+|3-x|$ iii) $|x-1|=x-|5-x|$

Να λυθούν οι ανισώσεις

i) $|2x+5| \leq 9$ ii) $|2x-3| \geq 7$ iii) $|7-2x| \leq 9$

Να λυθούν οι ανισώσεις i) $|2|x|-7| \leq 3$ ii) $|2|x|-5| \geq 1$ iii) $|2|x|+1| \leq 5$

Να λυθούν οι ανισώσεις

i) $\frac{2|x|+1}{3} + \frac{|x|-4}{6} \geq \frac{|x|}{2} - 1$ ii) $\frac{2|x+1|+1}{5} - \frac{|x+1|-2}{2} \geq \frac{3|x+1|+4}{10}$

iii) $\frac{2|x-5|+1}{3} - \frac{|x-5|-1}{6} > \frac{3-|5-x|}{2}$

Να λυθούν οι ανισώσεις

i) $3 \leq |2x+5| \leq 9$ ii) $1 \leq |3-2x| \leq 5$ iii) $1 < |2|x|-5| < 9$ iv) $2 < |1-2x| \leq 7$

Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις

$$\text{i)} A = 2|x-3| + x - 5 \quad \text{ii)} B = 2|x-1| + |3-x| - x - 2 \quad \text{iii)} \Gamma = \frac{|x|}{x} \cdot |x+3|$$

Να λυθεί η εξίσωση: $|2x+1|-5=3$

$$\text{Να λυθεί η εξίσωση: } \frac{|2x+3|+2}{5} - \frac{|2x+3|-3}{10} = \frac{|2x+3|-1}{2}$$

Να λυθεί η εξίσωση: $|2|x|-5|=|x|-4$

Να λυθεί η ανίσωση: $||2x+3|-5| \leq 1$

$$\text{Να λυθεί η ανίσωση: } \frac{|1-2x|+5}{2} - \frac{|1-2x|-3}{6} \leq \frac{|1-2x|+1}{4} + 3$$

Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β, γ για τους οποίους ισχύει:

$$\text{i)} |2\alpha+1| + |\beta-1| + |\gamma+3| = 0 \quad \text{ii)} |\alpha+1| + (\beta+2)^2 + (\gamma-3)^4 = 0$$

$$\text{Να αποδειχθεί ότι } 5 \frac{x+2}{|x+2|} - 2 \frac{y-3}{|y-3|} \leq 7$$

$$\text{Να αποδειχθεί ότι } 3 \frac{|x+1|}{x+1} - 2 \frac{|y-2|}{y-2} \geq 5$$

Αν $\alpha < \beta < \gamma$ να απλοποιηθεί η παράσταση: $A = 3|\alpha-\beta| - 2|\beta-\gamma| + 4|\gamma-\alpha|$

Αν $\alpha < \beta < \gamma$ να απλοποιηθεί η παράσταση: $A = 5|\alpha-\beta-1| - 3|\beta-\gamma-2| + 2|\gamma-\alpha+1|$

Για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού x να απλοποιηθεί η παράσταση
 $A = 3|x-2| - 2|x+1| - |5-x|$

Για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού x να απλοποιηθεί η παράσταση
 $A = 2|x+2| - |x^2+1| - 3|3-x|$

Για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού x να απλοποιηθεί η παράσταση
 $A = x + |x+2| - 2|x|$

$$\text{Αν } x = \frac{\alpha}{|\alpha|+|\beta|} \text{ και } y = \frac{\beta}{|\alpha|+|\beta|} \text{ να δειχθεί ότι } |x|+|y|=1$$

$$\text{Αν } \alpha \in \mathbb{R} - \{1\} \text{ και } \left| \frac{\alpha-4}{\alpha-1} \right| = 2 \text{ και να δειχθεί ότι } |\alpha| = 2$$

Αν είναι $\left| \frac{3\alpha+2\beta}{2\alpha+3\beta} \right| < 1$ ναδειχθεί ότι $\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| < 1$

Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α και β ναδειχθεί ότι: $\frac{\alpha}{1+|\alpha|} = \frac{\beta}{1+|\beta|} \Leftrightarrow \alpha = \beta$

Για κάθε $\alpha \neq 0$ ναδειχθεί ότι $\left| \alpha + \frac{1}{\alpha} \right| \geq 2$

Ναλυθεί η εξίσωση: $|2|x|-5| = ||x|-4|$

Ναλυθεί η ανίσωση: $||2x+3|-5| \leq 1$

Ναλυθεί η ανίσωση: $\frac{|1-2x|+5}{2} - \frac{|1-2x|-3}{6} \leq \frac{|2x-1|+1}{4} + 3$

Έστω ότι $|3x-y| < 2$ και $|x-3y| < 2$. Να αποδειχθεί ότι $|x-y| < 1$

Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

$$A = \sqrt{6} \cdot \sqrt{3+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3-\sqrt{3}} \quad (\text{Απ: } A=6)$$

$$B = \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{10}+1} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{10}-1} \quad (\text{Απ: } B=3)$$

Να υπολογιστούν οι τιμές των παραστάσεων:

$$A = \sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}} \quad (\text{Απ: } A=4)$$

$$B = \sqrt{11+6\sqrt{2}} + \sqrt{11-6\sqrt{2}} \quad (\text{Απ: } B=6)$$

Ναδειχθεί ότι $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8+\sqrt{15}} = \sqrt{15}+1$

Να βρεθούν οι τιμές των παραστάσεων:

$$\text{i) } A = 2\sqrt{125} + 3\sqrt{20} - \sqrt{18} + 5\sqrt{50} - 2\sqrt{72} \quad \text{ii) } B = 3\sqrt[3]{16} + 2\sqrt[3]{81} + \sqrt[3]{54} - 5\sqrt[3]{24}$$

Να βρεθούν οι τιμές των παραστάσεων:

$$\text{i) } A = 2\sqrt{\alpha^2} + 3\sqrt[3]{125} - \sqrt[4]{81\alpha^4} + \sqrt[5]{32}, \alpha < 0 \quad \text{ii) } B = \sqrt{(x-2)^2} + \sqrt{x^2-10x+25}, 2 < x < 5$$

Για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού x να απλοποιηθεί η παράσταση

$$A = \sqrt{(x+2)^2} - \sqrt{x^2-6x+9} + x$$

Για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού x να απλοποιηθεί η παράσταση

$$A = \sqrt{x^4 + 2x^2 + 1} + \sqrt{4y^4 + 2y^2 + 1}$$

Αν είναι $\alpha = \sqrt{5} + \sqrt{2}$ και $\beta = \sqrt{5} - \sqrt{2}$ να βρεθούν οι τιμές των παραστάσεων

$$\text{i)} A = 3\alpha^2 - 4\alpha\beta + 3\beta^2 \quad \text{ii)} B = 5\alpha^2 - 3\alpha\beta - 2\beta^2$$

Αν είναι $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ να δειχθεί ότι $\sqrt{\alpha^4 + 4\beta^2} + \sqrt{\beta^4 + 4\alpha^2} = 3$

Για ποιές τιμές του πραγματικού αριθμού x ορίζονται οι παραστάσεις

$$\text{i)} A = \sqrt{2x-1} + \sqrt{2-3x} \quad \text{ii)} B = \sqrt{|x|-1} + \sqrt{2-|x|}$$

Να βρεθούν οι τιμές των παραστάσεων:

$$A = (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})(\sqrt[4]{\alpha} + \sqrt[4]{\beta})(\sqrt[4]{\alpha} - \sqrt[4]{\beta}), \alpha, \beta \geq 0$$

$$B = (\sqrt{7} + \sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{7} - \sqrt{5} - \sqrt{2})$$

i) Να υπολογιστούν οι παραστάσεις $(2+3\sqrt{2})^2$ και $(2-3\sqrt{2})^2$

ii) Να απλοποιηθεί η παράσταση $A = \sqrt{22+12\sqrt{2}} + \sqrt{22-12\sqrt{2}}$

Να απλοποιηθεί η παράσταση $A = \frac{\sqrt{x^2+2x+1}}{x+1} + \frac{\sqrt{x^2-4x+4}}{x-2}$, αν $-1 < x < 2$

Να υπολογιστούν οι παραστάσεις

$$\text{i)} \sqrt{44} \cdot \sqrt{5-\sqrt{3}} \cdot \sqrt{5+\sqrt{3}} \quad \text{ii)} \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{11}-\sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{11}+\sqrt{2}}$$

Να βρεθούν τα εξαγόμενα:

$$\text{i)} \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[4]{x^3} \cdot \sqrt[6]{x}, x \geq 0 \quad \text{ii)} \sqrt[5]{x^2} \cdot \sqrt[10]{x^3} \cdot \sqrt{x}, x \geq 0 \quad \text{iii)} \frac{\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[4]{x^3} \cdot \sqrt{x}}{\sqrt[12]{x^7} \cdot \sqrt[6]{x^5}}, x > 0$$

Να μετατραπούν οι παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητό εκθέτη:

$$\text{i)} A = \frac{3}{\sqrt[3]{3^2}}, \text{ ii)} B = \frac{10}{\sqrt[3]{5}}, \text{ iii)} \Gamma = \frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}, \text{ iv)} \Delta = \frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}, \text{ v)} E = \frac{1}{2+\sqrt{2}+\sqrt{6}}$$

Να γίνουν οι πράξεις: $\frac{1}{\sqrt{2}-1} + \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \frac{1}{2-\sqrt{3}}$

Να απλοποιηθούν τα ριζικά:

i) $\sqrt{7+2\sqrt{10}}$, ii) $\sqrt{11-4\sqrt{7}}$, iii) $\sqrt{\alpha+\beta-2\sqrt{\alpha\beta}}$, $\alpha, \beta > 0$ iv) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$, v) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$

Να υπολογιστεί η παράσταση: $A = \sqrt{7-2\sqrt{10}} - \sqrt{7+2\sqrt{10}}$

Να υπολογιστεί η παράσταση: $A = \sqrt{3-\sqrt{5}} - \sqrt{3+\sqrt{5}}$ ($A = -\sqrt{2}$)

Να υπολογιστεί η παράσταση: $A = \sqrt{7-3\sqrt{5}} - \sqrt{7+3\sqrt{5}}$ ($A = 3\sqrt{2}$)

Να συγκριθούν οι αριθμοί:

i) $\sqrt{5}$ και $\sqrt{3} + \sqrt{2}$, ii) $\sqrt{10} + 1$ και $\sqrt{5} + \sqrt{2}$, iii) $\sqrt[3]{5}$ και $\sqrt{3}$

Αν είναι $x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$ να υπολογιστούν οι τιμές των παραστάσεων

i) $A = x + \frac{1}{x}$, ii) $B = x^2 + \frac{1}{x^2}$

Αν $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ να δειχθεί ότι : $\sqrt{\alpha+\beta} \leq \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$

Αν $\alpha > 0$ να δείξετε ότι : $\sqrt{\alpha} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \geq 2$

Αν είναι $\alpha = \sqrt{5} + \sqrt{2}$ και $\beta = \sqrt{5} - \sqrt{2}$ να βρεθεί η τιμή της παράστασης $A = 3\alpha^2 - 4\alpha\beta + 3\beta^2$.

Να γίνουν οι πράξεις: $\frac{1}{\sqrt{2}-1} + \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \frac{1}{2-\sqrt{3}}$

i) Να υπολογιστούν οι παραστάσεις $(2+3\sqrt{2})^2$ και $(2-3\sqrt{2})^2$

ii) Να απλοποιηθεί η παράσταση $A = \sqrt{22+12\sqrt{2}} + \sqrt{22-12\sqrt{2}}$

Να απλοποιηθεί η παράσταση $A = \frac{\sqrt{x^2+2x+1}}{x+1} + \frac{\sqrt{x^2-4x+4}}{x-2}$, αν $-1 < x < 2$