ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ' (4/6/ 2024)

Θέμα Α .

Α1. Υποθέτουμε ότι $f(\alpha) < f(\beta)$ Τότε θα ισχύει $f(\alpha) < \zeta < f(\beta)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \zeta$, $x \in [\alpha, \beta]$.

Τότε ι) Η g είναι συνεχής στο [α, β] και

ιι) $g(\alpha)g(\beta) < 0$ αφού $g(\alpha) = f(\alpha) - \zeta < 0$ και $g(\beta) = f(\beta) - \zeta > 0$

Επομένως σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε

$g(x_0) = f(x_0) - \zeta = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = \zeta$

Α2. Έστω f συνεχής στο Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Θα λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ, αν η f΄ είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ

Α3 Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα [α,β]

Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α, β] τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt = G(\beta) - G(\alpha)$$

Α4 α) Σωστό Β) Σωστό Γ) Λάθος Δ) Λάθος Ε) Σωστό

Θέμα Β

Β1 $f = \frac{g}{h}$: Πρέπει $h(x) \neq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \neq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}^2 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 1$ και

$A_f = A_{g/h} = A_g \cap A_h$με $x \neq 1 = (1, +\infty)$

Με $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{\frac{x_{-}+1}{\sqrt{x}}}{\frac{x-1}{\sqrt{x}}} = \frac{x+1}{x-1},\ x > \perp$

$r = g \cdot h:\ A_r = A_{gh} = A_g \cap A_h = [1, +\infty)$

$r(x) = g(x) \cdot h(x) = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = x - \frac{1}{x}$, $x \geq 1$

Β2 ***Α τρόπος***

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \frac{x_1 + 1}{x_1 - 1} = \frac{x_2 + 1}{x_2 - 1} \Leftrightarrow (x_2 + 1)(x_2 - 1) = (x_{\perp} - 1)(x_2 - 1)$$

$$\langle = \rangle x_1x_2 - x_1 + x_2 - 1 = x_1x_2 + x_1 - x_2 - 1 \Leftrightarrow 2x_1 = 2x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Άρα η f είναι 1-1 , άρα αντιστρέφεται

Β τρόπος

$f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2} < 0$;Άρα η f φθίνουσα άρα 1-1.

$f\big((1,+\infty)\big) = \left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x),\ \lim\limits_{x\to 1} f(x)\right) = (1,+\infty)$

Για x>1: $f(x) = y \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} = y \Leftrightarrow x + 1 = y(x-1)$

$x + 1 = yx - y \Leftrightarrow yx - x = y + 1 <\Rightarrow (y-1)x = y + 1$

$x = \frac{y+1}{y-1}, y \neq 1\ \kappa\alpha\iota\ x > 1 \Leftrightarrow \frac{y+1}{y-1} > 1$

$$\Leftrightarrow \frac{y+1-(y-1)}{y-1} > 0 \Leftrightarrow \frac{2}{y-1} > 0$$
$$\Leftrightarrow y > 1$$

Άρα $f^{-1}(y) = \frac{y+1}{y-1}, y > 1$ οπότε $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $x > 1$

Επειδή $A_f = A_{f^{-1}} = (1,+\infty)$ και $f^{-1}(x) = f(x)$. Για κάθε $x \in (1,+\infty)$ ισχύει ότι $f^{-1} = f$.

Β3

$A_r = [1,+\infty)$ Και r συνεχής άρα η r δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

<u>Πλαγιές οριζόντιες</u>

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{r(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x - \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = 1 = \lambda$$

και $\lim_{x\to+\infty}(r(x) - 1\cdot x) = \lim_{x\to+\infty}\left[\left(x - \frac{1}{x}\right) - x\right] = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right) = 0 = \beta$

Άρα η (ε) y=χ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$

Β4

Η εξίσωση $(f^{-1}(f(x)))^2 = 1 + 4r(x)$ ορίζεται για $x \in A_f \cap A_r$ δηλαδή όταν $x \in (1,+\infty)$

Τότε ισοδύναμα προκύπτει: $x^2 = 1 + 4\left(x - \frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 = 1 + 4x - \frac{4}{x} \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 - x + 4 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2(x-4) - (x-4) = 0 \Leftrightarrow (x-4)(x^2-1) = 0 \Leftrightarrow (x-4)(x-1)(x+1) = 0$
$\boldsymbol{x = 4}$ **δεκτ**ή ή $x = 1$ απορρίπτεται ή $x = -1$ απορρίπτεται

Θέμα Γ

Γ1 $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}\left(-2x + 4 + e^{\lambda}\right) = -4 + 4 + e^{\lambda} = e^{\lambda}$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}(-x^2 + 4x - 3 + \lambda) = -4 + 8 - 3 + \lambda = 1 + \lambda$

$f(2) = 1 + \lambda$

Επειδή f συνέχεις στο 2 ισχύει $e^{\lambda} = 1 + \lambda \Leftrightarrow \lambda = 0$

αφού ισχύει ότι $e^{x} \geq x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για x=0

Γ2. $f(x) = \begin{cases} -2x + 5\,, 0 \leq x < 2 \\ \\ -x^2 + 4x - 3, x \geqslant 2 \end{cases}$

Για κάθε $x \in (0,2)$: $f'(x) = -2 < 0$

Για κάθε $x \in (2, +\infty)$: $f'(x) = -2(x-2) < 0$ Άρα $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (0,2) \cup (2, +\infty)$ και επειδή η f είναι συνεχής και στο2 $\Rightarrow f \downarrow$ στο $[0, +\infty)$. Επομένως η f παρουσιάζει για x=0 μέγιστο to f$(0) = 5$

Γ3 i) $\lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{-2x+5-1}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{-2(x-2)}{x-2} = -2$

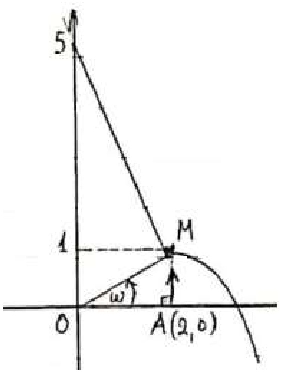
$$\lim_{x\to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{-x^2 + 4x - 3 - 1}{x - 2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{-(x-2)^2}{x - 2} = 0$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στοx=3 που ανήκει στο διάστημα (0,3) επομένως δεν ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής στο [0,3]

ii) Αρκεί να βρεθεί αν υπάρχει $\xi \in (0,3)$ τέτοιο ώστε$f'(\xi) = \frac{f(3)-f(0)}{3-0} \Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{-9+12-3-5}{3} \Leftrightarrow f'(5) = -\frac{5}{3}$

Για $\xi \in (0,2)$ είναι $f'(\xi) = -2 \neq -\frac{5}{3}$
Για $\xi \in (2,3)$ είναι $f'(\xi) = -\frac{5}{3} \Leftrightarrow -2\xi + 4 = -\frac{5}{3} \Leftrightarrow -2\xi = -\frac{17}{3}$
$\xi = \frac{17}{6}\, \delta\varepsilon\kappa\tau ó$

Γ4



Είναι $M(2,y), y \geqslant 0$ Στο τρίγωνο OAM ισχύει: $\varepsilon\varphi\omega = \frac{y}{2}$. Τη χρονική στιγμή t είναι $\varepsilon\varphi\big(\omega(t)\big) = \frac{y(t)}{2}$. Παραγωγίζω ως προς t

$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\,(\omega t_o)} \cdot \omega'(t) = \frac{y'(t)}{2}$ (1).

Τη χρονική στιγμή t_o κατά την οποία το Μ συναντάει τη γραφική παράσταση της f στο σημείο(-2,1) θα ισχύει $(OM) = \sqrt{5}$ (από πυθαγόρειο θεώρημα) άρα $\sigma\upsilon\nu\big(\omega(t_0)\big) = \frac{2}{\sqrt{5}}$ και $y'(t_0) = v(t_0) = \frac{1}{2}$ μμ/sec

Από τη σχέση (1) για $t=t_o$

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\,\omega(t_0)} \cdot \omega'(t_0) = \frac{y'(t_0)}{q} \Rightarrow \frac{5}{4} \cdot \omega(t_0) = \frac{1}{4} \Rightarrow \omega'(t_0) = \frac{1}{5}\text{rad/sec}$$

ΘΕΜΑ Δ

$\boldsymbol{\Delta_1}$

Για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) = \frac{(\ln\, x+ax)' \cdot x - (\ln\, x+ax)\cdot(x)}{x^2}$

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{x} + a\right)x - \ln\, x - ax}{x^2} = \frac{1 - \ln\, x}{x^2}$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \mathrm{e}$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < e$

Για $x = e$ η f παρουσιάζει μέγιστο το $f(e) = \frac{1}{e} + a$

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	max	$\searrow$	

Και από το σύνολο τιμών προκύπτει ότι $f_{\max} = 1 + \frac{1}{e}$, άρα $a = 1$.

Δ2 $\cdot$ $f(x) = \frac{x + \ln x}{x}, x > 0$ Η f συνέχης στο $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ως πράξεις συνεχών με $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2} + \ln\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} =$

$2\left(\frac{1}{2} + \ln 1^{\circ} - \ln 2\right) = 1 - 2\ln 2 = \ln e - \ln 4 < 0$

και $f(1) = 1 > 0$, άρα από θεώρημα Bolzano η εξίσωση f(x)=0 έχει λύση $x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$Στο διάστημα A1=$(0, e]$ η f↑ άρα η ρίζα είναι μοναδική

Στο $A_2 = (e, +\infty), f(A_2) = (\lim_{x \to +\infty} f(x), \lim_{x \to e^+} f(x)) = \left(\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x + x}{x}, 1 + \frac{1}{e}\right) = \left(1{,}1 + \frac{1}{e}\right)$

οπου $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x + x}{x} \underset{\text{DLH}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x} + 1}{1} = 1$

Άρα $0 \notin f(A_2)$, επομένως δεν υπάρχει ρίζα της f στο A_2

Δ3. i) $f(4) = \frac{\ln 4 + 4}{4} = \frac{\ln 4}{4} + 1 = \frac{\ln 2^2}{4} + 1 = \frac{2\ln 2}{4} + 1 = \frac{\ln 2}{2} + 1$

$$f(2) = \frac{\ln 2 + 2}{2} = \frac{\ln 2}{2} + 1$$

Άρα f(2)=f(4)

Το 2 είναι μοναδική λύση της f(x)=f(2) στο A_1 λόγω μονοτονίας

Το 4 είναι μοναδική λύση της f(x)=f(2) στο A_2 λόγω μονοτονίας

ιι)

$$x > 0: \quad 2^x \leqslant x^2 \Leftrightarrow \ln 2^x \leq \ln x^2 \Leftrightarrow x \cdot \ln 2 \leq 2\ln x$$
$$\Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} \geqslant \frac{\ln 2}{2} \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} + 1 \geqslant \frac{\ln 2}{2} + 1$$
$$\Leftrightarrow \frac{\ln x + x}{x} \geqslant \frac{\ln 2 + 2}{2} \Leftrightarrow f(x) \geqslant f(2)$$

Και στο $A_1 = (0, e]$ η f αύξουσα άρα $f(x) \geqslant f(2) \Leftrightarrow 2 \leq x \leq e$

στο $A_2 = (e, +\infty)$ η φθινουσα f άρα $f(x) \geqslant f(2) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f(x) \geqslant f(4) \Leftrightarrow x \leq 4$$

Δηλαδή $e < x \leq 4$

Άρα τελικά $x \in [2,4]$

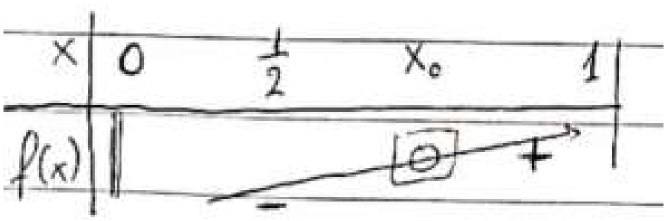
Δ4

Η g συνεχής στο ως πράξεις και συνθέση συνεχών*

$E(\Omega) = \int_{-\ln 2}^{0} |g(x)| dx = \int_{-\ln 2}^{0} |f(e^x)| \frac{1-x}{e^x} dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} |f(u)| \frac{1-\ln u}{u^2} du$
θέτω $e^x = u \Leftrightarrow x = \ln u$

$u_1 = e^{-\ln 2} = \dfrac{1}{2}, dx = \dfrac{1}{u} du$
$u_2 = e^0 = 1$

Αλλά



Οπότε το ολοκλήρωμα ισούται με $E(\Omega) = -\int_{1}^{x_0} f(u) \cdot f'(u) du + \int_{x}^{2} f(uf' f(u) du$

$$= -\int_{\frac{1}{2}}^{x_0} \left(\frac{f^2(u)}{2}\right)^{\frac{1}{x_0}} du + \int_{0}^{2} \left(\frac{f^2(u)}{2}\right)' du$$
$$= -\frac{1}{2}[f^2(u)]_{\frac{1}{2}}^{x_0} + \frac{1}{2}[f^2(u)]_{x_0}^{1} = -\frac{1}{2}\left(f^2(x_0) - f^2\left(\frac{1}{2}\right)\right) + \frac{1}{2}(f^2(1) - f^2(x_0)$$
$$= \frac{1}{2} f^2\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} f^2(1) = \frac{f^2\left(\frac{1}{2}\right) + f^2(1)}{2} = \frac{(1 - 2\ln 2)^2 + 1}{2}$$