

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

«ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ» ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Σχολικό βιβλίο, σελ. 133
A2. Σχολικό βιβλίο, σελ. 51
A3. Σχολικό βιβλίο, σελ. 185
A4. α) Λ, β) Σ, γ) Σ, δ) Σ, ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

$$\text{B1. } D_{f \circ g} = \left\{ x \in [2, +\infty) \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \geq 2 \\ \sqrt{x-2} + 1 > 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \geq 2 \\ \sqrt{x-2} > 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \geq 2 \\ x > 2 \end{array} \right\}$$

$$\text{άρα } x \in (2, +\infty)$$

$$h(x) = f(g(x)) = 2\ln(\sqrt{x-2} + 1 - 1) = 2\ln\sqrt{x-2} = 2 \cdot \frac{1}{2} \ln(x-2) = \ln(x-2)$$

$$\text{B2. } h(x) = \ln(x-2) \text{ είναι παρ / μη με } f'(x) = \frac{1}{x-2} > 0 \text{ για } x \in (2, +\infty)$$

άρα $h \uparrow$, άρα “1-1” και τότε υπάρχει η h^{-1} .

$$\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \ln(x-2) = \lim_{u \rightarrow 0} \ln u = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x-2) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \ln u = +\infty$$

Επειδή η συνεχής και γνησίως αύξουσα τότε έχει σύνολο τιμών

$$\left(\lim_{x \rightarrow 2} h(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) \right) = (-\infty, +\infty)$$

$$y = h(x) \Leftrightarrow y = \ln(x-2) \Leftrightarrow e^y = x-2 \Leftrightarrow x = 2 + e^y$$

$$\text{άρα } h^{-1}(x) = 2 + e^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\mathbf{B3.} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \left(h(x) \frac{f(x)}{x-2} \right)$$

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow 2} h(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = f'(2) \quad \text{όπου}$$

$$\bullet \quad f'(x) = (2 \ln(x-1))' = \frac{2}{x-1} \quad \text{άρα } f'(2) = 2$$

$$\text{Τότε } \lim_{x \rightarrow 2} \left(h(x) \frac{f(x)}{x-2} \right) = -\infty$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

$$\text{i) Για } \kappa \neq 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\kappa x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \kappa x = \begin{cases} +\infty, & \kappa > 0 \\ -\infty, & \kappa < 0 \end{cases}$$

$$\text{Για } \kappa = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mu x}{x^2 + 1} = 0 \quad \text{δεκτό άρα } \kappa = 0$$

$$\text{ii) } f(x) = \frac{\mu x}{x^2 + 1}$$

$$f'(x) = \mu \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}, \quad f'(0) = 1 \Leftrightarrow \mu = 1 \quad \text{άρα } f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

Γ2.

$$i) f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-1 \quad \eta \quad x=1$$

	$-\infty$	-1	$+1$	$+\infty$
f'	-	+	-	
f				
		T.E.	T.M.	

$$f \downarrow \Delta_1 = (-\infty, -1], \quad f \uparrow \Delta_2 = [-1, 1], \quad f \downarrow \Delta_3 = [1, +\infty)$$

$$\text{στο } x_0 = -1 \quad \text{έχει τοπικό ελάχιστο} \quad f(-1) = -\frac{1}{2}$$

$$\text{στο } x_0 = 1 \quad \text{έχει τοπικό μέγιστο} \quad f(1) = \frac{1}{2}$$

$$ii) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\text{Άρα } f(\Delta_1) = \left[f(-1), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = \left[-\frac{1}{2}, 0 \right), \quad f(\Delta_2) = [f(-1), f(1)] = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]$$

$$f(\Delta_3) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(1) \right] = \left(0, \frac{1}{2} \right] \quad \text{άρα} \quad f(\mathbb{R}) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) \cup f(\Delta_3) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]$$

$$\text{Η εξίσωση έχει λύση αν και μόνον αν} \quad -\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} + \alpha^2 \leq \frac{1}{2} \Rightarrow -1 \leq \alpha^2 \leq 0$$

που ισχύει μόνο για $\alpha = 0$.

$$\text{Τότε έχουμε } f(x) = \frac{1}{2}. \quad \text{Για } x \neq 1 \text{ έχουμε } f(x) < \frac{1}{2} \text{ άρα η μοναδική λύση είναι για } x = 1$$

Γ3.

$$i) I_v = \int_0^1 \frac{x^{2v+1}}{x^2+1} dx$$

$$I_{v+1} = \int_0^1 \frac{x^{2v+3}}{x^2+1} dx$$

$$I_v + I_{v+1} = \int_0^1 \left(\frac{x^{2v+1}}{x^2+1} + \frac{x^{2v+3}}{x^2+1} \right) dx = \int_0^1 \frac{x^{2v+1}(1+x^2)}{x^2+1} dx =$$

$$= \int_0^1 x^{2v+1} dx = \left[\frac{x^{2v+2}}{2v+2} \right]_0^1 = \frac{1}{2v+2}$$

$$ii) I_0 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \left[\ln(x^2+1) \right]_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2$$

$$\text{Για } v=0 \quad I_0 + I_1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow I_1 = \frac{1}{2} - I_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2$$

$$\text{Για } v=1 \quad I_1 + I_2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow I_2 = \frac{1}{4} - I_1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{4}$$

ΘΕΜΑ Δ**Δ1.**

Θεωρούμε $h(x) = g(x) + x$ με $h(0) = g(0) > 0$, $h(-1) = g(1) - 1 < 0$,

Θ. Bolzano στο $[-1, 0]$

$h'(x) = g'(x) + 1 \neq 0$ συνεχής άρα διατηρεί πρόσημο

α' τρόπος: Θεώρημα Rolle και άτοπο

β' τρόπος: η γνησίως μονότονη άρα μοναδική ρίζα

Δ2.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2(g(x) + x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x(g(x) + x) = 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - \kappa x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \left(2 \frac{\eta\mu x}{x} + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} \cdot \frac{\eta\mu x}{x} - \kappa \right) = \\ &= 2 + 1 - \kappa = 3 - \kappa \end{aligned}$$

Επειδή η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη $3 - \kappa = 0 \Leftrightarrow \kappa = 3$

β' τρόπος : D.L.H.

Δ3.

Για $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ έχουμε

$$f'(x) = 2\sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - 3 = \frac{2\sigma\upsilon\nu^3 x - 3\sigma\upsilon\nu^2 x + 1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{(2\sigma\upsilon\nu x + 1)(\sigma\upsilon\nu x - 1)^2}{\sigma\upsilon\nu^2 x} > 0$$

για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ κι επειδή f συνεχής στο $x=0$ είναι $f \uparrow \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ άρα

$$f(x) \geq f(0) \Leftrightarrow f(x) \geq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x) = +\infty$$

Επομένως $f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right)\right) = [0, +\infty)$ και $\frac{\pi}{3} \in [0, +\infty)$ επομένως υπάρχει

τουλάχιστον ένα $x_2 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ ώστε $3f(x_2) = \pi$ και επειδή $f \uparrow$ άρα x_2 μοναδικό.

Δ4.

i) Στο διάστημα $(x_1, 0]$ η $g(x) + x$ είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται, επομένως διατηρεί πρόσημο.

Επειδή $g(0) > 0$ τότε η $g(x) + x$ είναι θετική στο $(x_1, 0]$ επομένως $x^2(g(x) + x) \geq 0$ για κάθε $x \in [x_1, 0]$. Δηλαδή $f(x) \geq 0$ στο διάστημα $[x_1, 0]$

ii)

$$E(\Omega_1) = \int_{x_1}^0 |f(x)| dx, \quad E(\Omega_2) = \int_0^{\frac{\pi}{3}} |f(x)| dx$$

$$E(\Omega_1) = \int_{x_1}^0 |f(x)| dx = \int_{x_1}^0 x^2 g(x) dx + \int_{x_1}^0 x^3 dx$$

$$E(\Omega_2) = \int_0^{\frac{\pi}{3}} |f(x)| dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x) dx =$$

$$= -2[\sigma\upsilon\nu x]_0^{\frac{\pi}{3}} - [\ln(\sigma\upsilon\nu x)]_0^{\frac{\pi}{3}} - 3\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = -1 + 2 - \ln\frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{6} = 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6}$$

$$\int_{x_1}^0 x^2 g(x) dx - \frac{x_1^4}{4} = 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6}$$

$$\left[\frac{x^3}{3} g(x)\right]_{x_1}^0 - \frac{1}{3} \int_{x_1}^0 x^3 g'(x) dx - \frac{x_1^4}{4} = 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6}$$

$$\frac{x_1^4}{3} - \frac{x_1^4}{4} - 1 - \ln 2 + \frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{3} \int_{x_1}^0 x^3 g'(x) dx$$

$$\frac{x_1^4}{4} + \frac{\pi^2}{2} - 3\ln 2 - 3 = \int_{x_1}^0 x^3 g'(x) dx$$