

Χατζημανώλης Νίκος
Μαθηματικός,
Μ. Ed. Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών

Σημειώσεις Τριγωνομετρίας Β' Λυκείου

ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ 2014 (Β' ΕΚΔΟΣΗ)

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Με τις σημειώσεις αυτές προσπαθώ να αποτυπώσω τη δική μου διδακτική προσέγγιση για τη διδασκαλία των βασικών τριγωνομετρικών εννοιών. Για αυτό το λόγο, η έκταση της πρώτης ενότητας είναι σχετικά μεγάλη, διότι θεωρώ ότι η κατανόηση των πιο χρήσιμων εννοιών πρέπει να αναπτυχθεί σε εκείνο ακριβώς το σημείο. Η κεντρική τριγωνομετρική έννοια που διέπει το πνεύμα των σημειώσεων είναι ακριβώς αυτή της τελικής πλευράς μιας (τριγωνομετρικής) γωνίας. Ακόμη και στην ενότητα που αναφέρεται στην επίλυση των τριγωνομετρικών εξισώσεων, η τεκμηρίωση γίνεται με τη θέση της τελικής πλευράς στον τριγωνομετρικό κύκλο και όχι με τη χρήση των γραφικών παραστάσεων των τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Η δική μου εμπειρία δείχνει ότι με αυτή την προσέγγιση, οι μαθητές κατανοούν καλύτερα τον τρόπο που προκύπτουν οι συγκεκριμένοι τύποι.

Το συγκεκριμένο πόνημα απευθύνεται σε καθηγητές, όσο και σε μαθητές. Ωστόσο, προσπάθησα να καλύψω διάφορα μαθηματικά «κενά» που θεωρώ ότι υπάρχουν στο αντίστοιχο σχολικό βιβλίο. Για να μην παρεξηγηθώ, αναφέρομαι σε μαθηματικά και όχι σε διδακτικά κενά. Κυρίως αναφέρομαι στην ενότητα 4, όπου εκεί γίνεται μια προσπάθεια γενικής προσέγγισης των περιοδικών συναρτήσεων αποδεικνύοντας διάφορα χρήσιμα θεωρήματα. Θεωρώ ότι ένας καθηγητής θα τη βρει χρήσιμη και διαφωτιστική, αλλά μάλλον είναι δύσκολο να κατανοηθεί από έναν μαθητή. Γενικά, όταν ένας μαθητής βρίσκει δυσκολίες σε κάποια σημεία της θεωρίας, τότε μπορεί να τα παραλείψει και να συνεχίσει παρακάτω. Όμοια ο καθηγητής που θα χρησιμοποιήσει τις σημειώσεις αυτές, μπορεί να παραλείψει κάποια σημεία όταν το κρίνει σκόπιμο. Στο τέλος των σημειώσεων παραθέτω βιβλιογραφία την οποία θεωρώ χρήσιμη, αλλά δυστυχώς δύσκολα συναντάται στα βιβλιοπωλεία σήμερα. Θέλω να τονίσω ότι στόχος των σημειώσεων αυτών είναι να προσφέρει μια εναλλακτική προσέγγιση των μαθηματικών εννοιών, κάτι που κρίνω ότι λείπει από τη σύγχρονη φροντιστηριακή βιβλιογραφία και σχολική βιβλιογραφία. Από την άλλη, οι σημειώσεις αυτές σίγουρα δεν μπορούν να καλύψουν το εύρος των ασκήσεων που μπορούμε να συναντήσουμε σε ένα σύγχρονο και καλό βοήθημα μαθηματικών. Για αυτό πιστεύω ότι το πόνημα αυτό δεν μπορεί παρά να λειτουργήσει συμπληρωματικά με ένα καλό βοήθημα που προσφέρει μια πληθώρα ασκήσεων προς επίλυση.

Με ευχαρίστηση θα δεχτώ κάθε καλόπιστη κριτική και υπόδειξη που θα συμβάλλει στη βελτίωση αυτών των σημειώσεων.

Ο συγγραφέας

ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΤΗΣ 2^{ης} ΕΚΔΟΣΗΣ

Στη δεύτερη έκδοση προστέθηκαν οι ενότητες 7 και 8 που αναφέρονται στους τριγωνομετρικούς αριθμούς αθροίσματος γωνιών και διπλάσιας γωνίας αντίστοιχα.

Το παρόν πόνημα διατίθεται ελεύθερα μέσω του διαδικτύου, ωστόσο διέπεται από τους νόμους περί πνευματικών δικαιωμάτων.

© Copyright Οκτώβριος 2014

Νίκος Χατζημανώλης

Email: nikoschatzimanolis@gmail.com

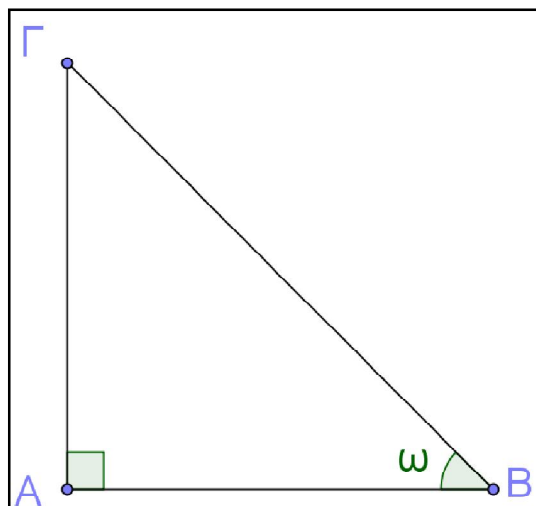
ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Ενότητα 1: Τριγωνομετρικοί αριθμοί.	1
Ενότητα 2: Τριγωνομετρικές ταυτότητες.	27
Ενότητα 3: Αναγωγή στο πρώτο τεταρτημόριο.	33
Ενότητα 4: Η έννοια της περιοδικής συνάρτησης.	47
Ενότητα 5: Βασικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις.	52
Ενότητα 6: Βασικές τριγωνομετρικές εξισώσεις.	68
Ενότητα 7: Τριγωνομετρικοί Αριθμοί Αθροίσματος Γωνιών.	79
Ενότητα 8: Τριγωνομετρικοί Αριθμοί Διπλάσιας Γωνίας.	88
Παράρτημα.	97
Ενδεικτική Βιβλιογραφία.	98

ΕΝΟΤΗΤΑ 1^η :ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

(1) Τριγωνομετρικοί Αριθμοί Οξείας Γωνίας Ορθογώνιου Τριγώνου.

Ορισμός 1: Έστω ω μια οξεία γωνία του τριγώνου ΑΒΓ. Τότε ορίζουμε τους παρακάτω τριγωνομετρικούς αριθμούς (βλ. και σχήμα):



ΣΧ. 1

$$\eta\mu\omega = \frac{\text{Απέναντι κάθετη πλευρά της } \omega}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{ΑΓ}{ΒΓ}$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\text{Προσκείμενη κάθετη πλευρά της } \omega}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{ΑΒ}{ΒΓ}$$

$$\epsilon\phi\omega = \frac{\text{Απέναντι κάθετη πλευρά της } \omega}{\text{Προσκείμενη κάθετη πλευρά της } \omega} = \frac{ΑΓ}{ΑΒ}$$

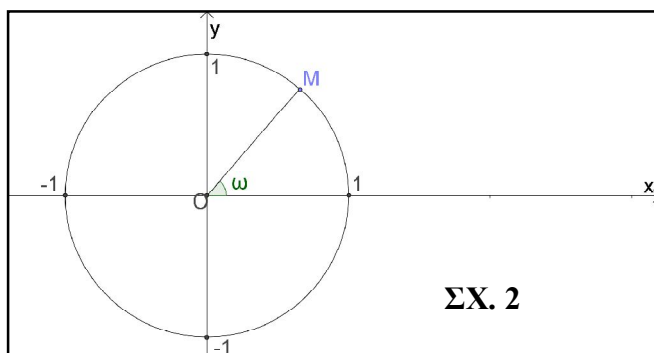
$$\sigma\phi\omega = \frac{\text{Προσκείμενη κάθετη πλευρά της } \omega}{\text{Απέναντι κάθετη πλευρά της } \omega} = \frac{ΑΒ}{ΑΓ}$$

(2) Τριγωνομετρικός Κύκλος–Τριγωνομετρική Γωνία.

Ορισμός 2: Έστω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Οxy. Ο κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα $\rho=1$ ονομάζεται τριγωνομετρικός κύκλος.

Ορισμός 3: Τριγωνομετρική Γωνία ονομάζουμε κάθε γωνία με πλευρές τις Οx και ΟM, όπου ΟM μια ακτίνα του τριγωνομετρικού κύκλου.

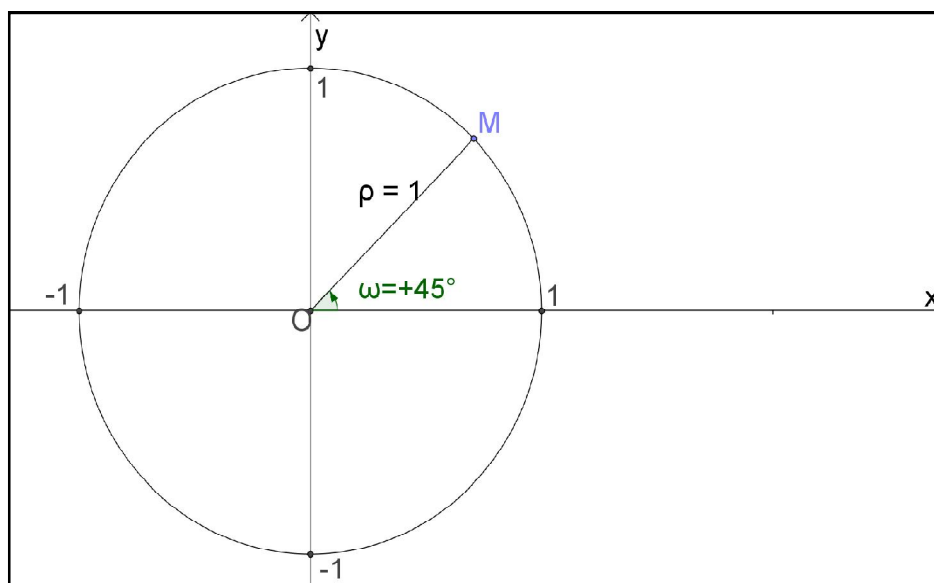
Ορισμός 4: Έστω ο τριγωνομετρικός κύκλος και η τριγωνομετρική γωνία $\hat{\omega} = \angle xOM$, όπου ΟM μια ακτίνα του τριγωνομετρικού κύκλου. Ο ημιάξονας Οx ονομάζεται αρχική πλευρά της γωνίας ω , ενώ η ακτίνα ΟM ονομάζεται τελική πλευρά της ω . Επίσης η ακτίνα ΟM ονομάζεται και επιβατική ακτίνα της γωνίας ω .



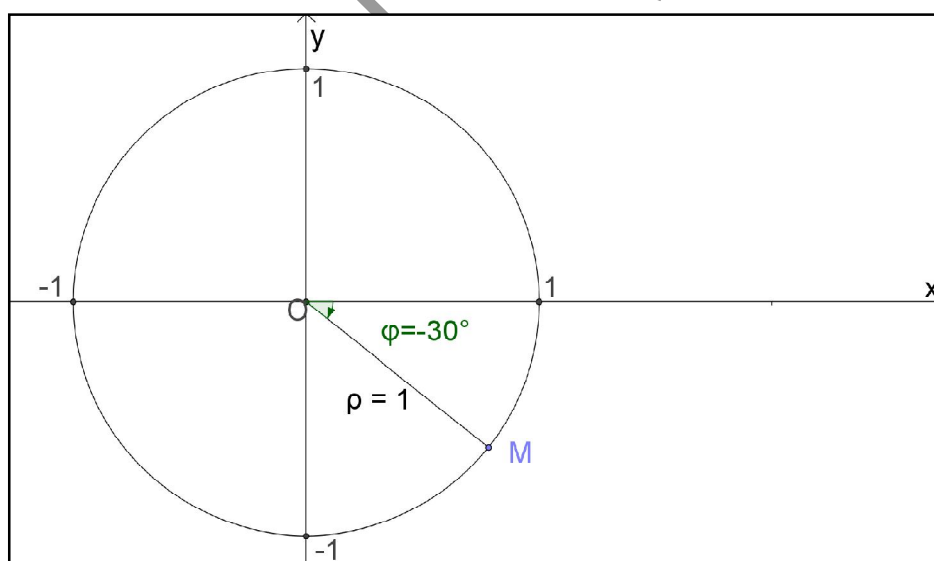
ΣΧ. 2

(3) Πρόσημο τριγωνομετρικής Γωνίας

Όταν ο ημιάξονας Ox κινείται κατά τη θετική φορά, δηλαδή αντίθετα από τη φορά των δεικτών του ρολογιού, ώστε να συμπίψει με μια ακτίνα OM , τότε στη γωνία που διαγράφεται αποδίδουμε θετικό πρόσημο. Αντίθετα, όταν ο ημιάξονας Ox κινείται κατά την αρνητική φορά, δηλαδή σύμφωνα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού, ώστε να συμπίψει με την ακτίνα OM , τότε στη γωνία που διαγράφεται αποδίδουμε αρνητικό πρόσημο. Επομένως στα σχήματα 3 και 4 παρακάτω, η γωνία ω είναι θετική και η γωνία φ είναι αρνητική:



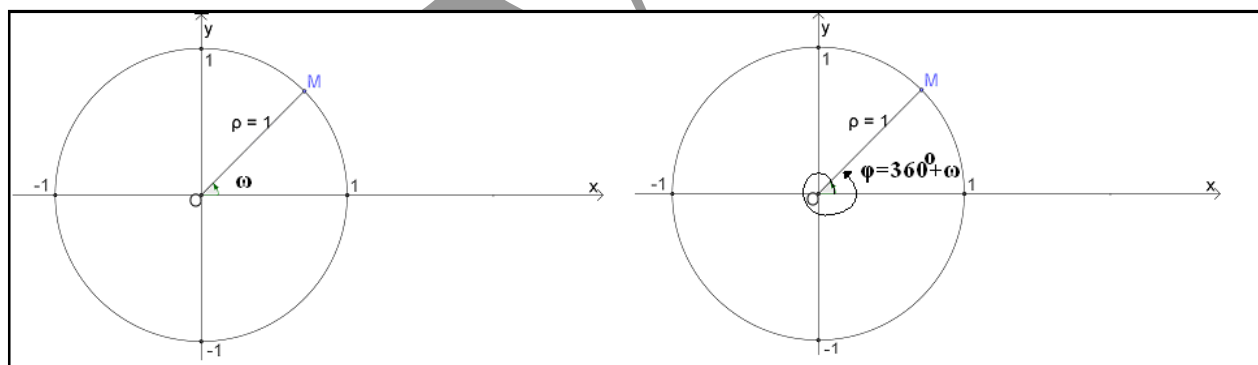
ΣΧ. 3



ΣΧ. 4

(4) Γωνίες μεγαλύτερες των 360° .

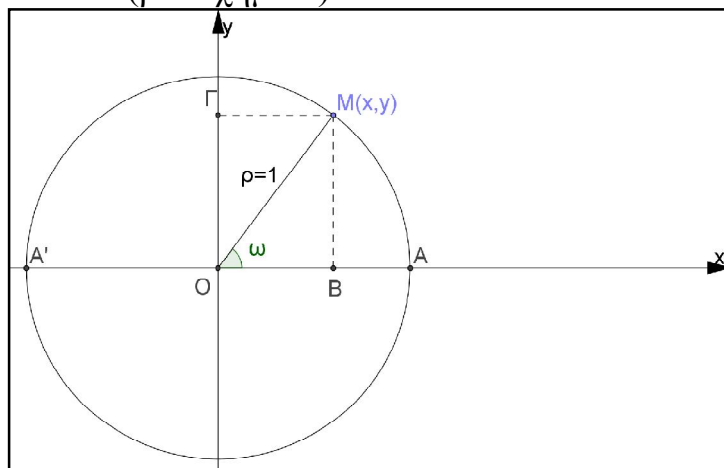
Όπως γνωρίζουμε, αν την περιφέρεια του κύκλου την «κόψουμε» σε 360 ίσα τόξα, τότε κάθε επίκεντρη γωνία που βαίνει σε κάθε ένα τέτοιο τόξο ορίζουμε να είναι ίση με 1° (μία μοίρα). Έστω τώρα, ο τριγωνομετρικός κύκλος. Αν ο ημιάξονας Ox διαγράψει μια γωνία 360° και επιπλέον κινηθεί κατά μία θετική γωνία ω , τότε θα θεωρούμε ότι η συνολική γωνία φ που διέγραψε ο θετικός ημιάξονας είναι μεγαλύτερη από 360° και έχει μέτρο $\varphi = 360^\circ + \omega$ (βλ. σχήμα 5). Όμοια, μπορούμε να θεωρήσουμε τον ημιάξονα Ox να διαγράφει k πλήρεις περιστροφές είτε κατά τη θετική, είτε κατά την αρνητική φορά. Γενικά το μέτρο μιας τριγωνομετρικής γωνίας φ ανάγεται στη μορφή $\varphi = k \cdot 360^\circ + \omega$, όπου $k \in \mathbb{Z}$ και $0^\circ \leq \omega < 360^\circ$.



ΣΧ. 5

(5) Τριγωνομετρικοί Αριθμοί Οποιασδήποτε Γωνίας

Ας θεωρήσουμε τον τριγωνομετρικό κύκλο και μια οξεία τριγωνομετρική γωνία $\hat{\omega}$ (βλ. σχήμα 6).



ΣΧ. 6

Τότε έχουμε:

- $\eta\omega = \frac{BM}{OM} = \frac{y}{1} = y$ (τεταγμένη του σημείου M).
- $\sigma\omega = \frac{OB}{OM} = \frac{x}{1} = x$ (τετμημένη του σημείου M).
- $\epsilon\omega = \frac{BM}{OB} = \frac{y}{x}$ (τεταγμένη του σημείου M προς τετμημένη του σημείου M).
- $\sigma\phi = \frac{OB}{BM} = \frac{x}{y}$ (τετμημένη του σημείου M προς τεταγμένη του σημείου M).

Ορισμός 5: Γενικά για μια οποιαδήποτε τριγωνομετρική γωνία ω με τελική πλευρά μια ακτίνα OM, όπου M σημείο στον τριγωνομετρικό κύκλο, ορίζουμε τους παρακάτω τριγωνομετρικούς αριθμούς ως εξής:

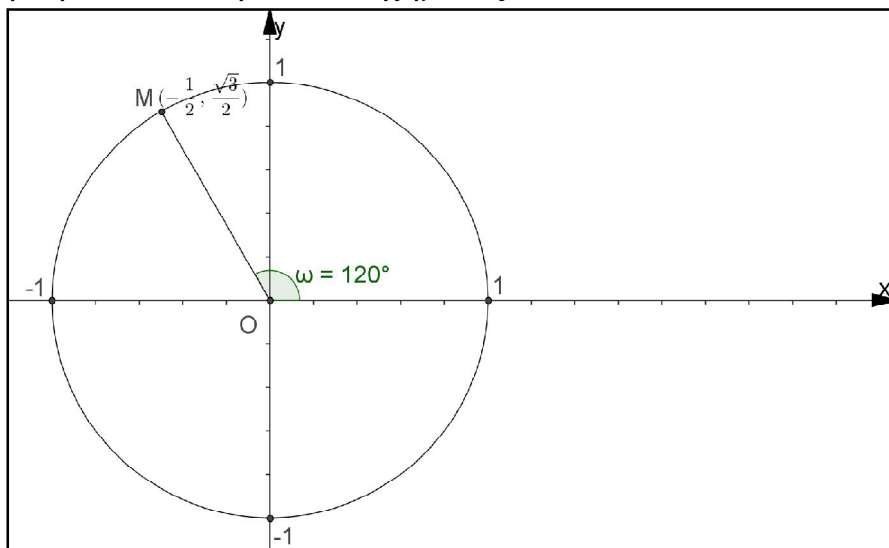
- $\eta\omega =$ (τεταγμένη του σημείου M).
- $\sigma\omega =$ (τετμημένη του σημείου M).
- $\epsilon\omega =$ (τεταγμένη του σημείου M προς τετμημένη του σημείου M).
- $\sigma\phi =$ (τετμημένη του σημείου M προς τεταγμένη του σημείου M).

Παρατηρήσεις:

- Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας οποιασδήποτε γωνίας ω ταυτίζονται με τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της τριγωνομετρικής γωνίας ϕ που έχει το ίδιο μέτρο με τη γωνία ω .
- Αν το σημείο M της τελικής πλευράς (σχ. 6) έχει συντεταγμένες $M(x,y)$, τότε εύκολα βλέπουμε ότι $-1 \leq x \leq 1$ και $-1 \leq y \leq 1$. Αυτό σημαίνει ότι $-1 \leq \sigma\omega \leq 1$ και $-1 \leq \eta\omega \leq 1$ για κάθε γωνία ω .

Εφαρμογή 1:

Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\omega=120^\circ$, με τη βοήθεια του παρακάτω σχήματος:



ΣΧ. 7

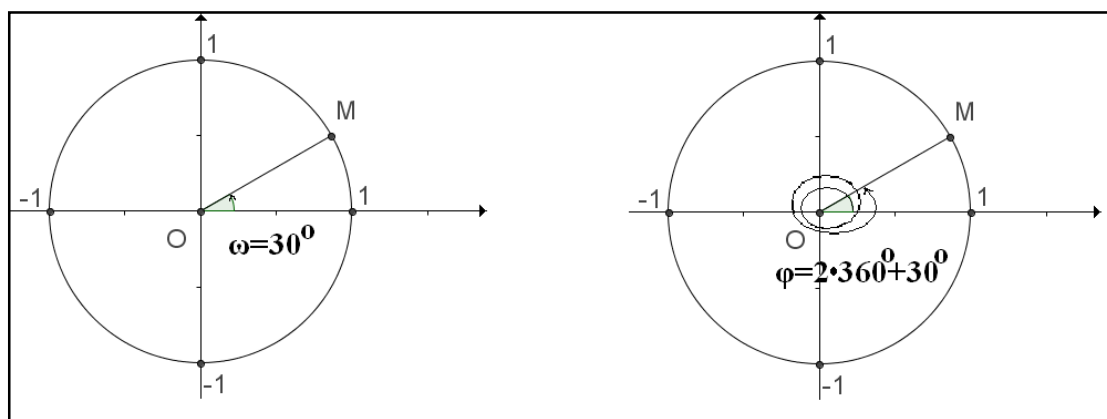
Απάντηση: Σύμφωνα με τους παραπάνω ορισμούς, προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} \eta\mu 120^\circ &= \frac{\sqrt{3}}{2}, & \sigma\upsilon\nu 120^\circ &= -\frac{1}{2}, & \epsilon\phi 120^\circ &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3} & \text{και} \\ \sigma\phi 120^\circ &= \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

Παρατηρήσεις:

1) Όταν δύο τριγωνομετρικές γωνίες ω και φ έχουν την ίδια τελική πλευρά, τότε η σχέση που συνδέει τα μέτρα τους είναι της μορφής $\varphi = \kappa \cdot 360^\circ + \omega$, όπου $\kappa \in \mathbf{Z}^*$:

* Με έντονο $\mathbf{Z}$ θα συμβολίζουμε το σύνολο των ακέραιων αριθμών.



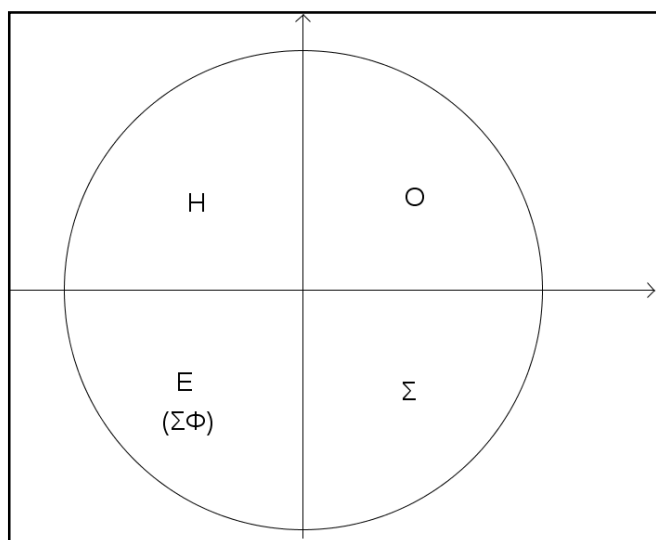
ΣΧ. 8

2) Σύμφωνα με τους παραπάνω ορισμούς των τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας, προκύπτει ότι δύο τριγωνομετρικές γωνίες έχουν ακριβώς τους ίδιους τριγωνομετρικούς αριθμούς όταν οι τελικές τους πλευρές ταυτίζονται. Δηλαδή αν φ και ω είναι δύο γωνίες με την ίδια τελική πλευρά θα ισχύει π.χ. $\eta\mu\varphi = \eta\mu\omega$, με $\varphi = \kappa \cdot 360^\circ + \omega$, όπου κ ένας ακέραιος αριθμός. Άρα $\eta\mu(\kappa \cdot 360^\circ + \omega) = \eta\mu\omega$. Γενικά ισχύουν οι παρακάτω ισότητες:

- $\eta\mu(\kappa \cdot 360^\circ + \omega) = \eta\mu\omega$
 - $\sigma\upsilon\nu(\kappa \cdot 360^\circ + \omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$
 - $\epsilon\varphi(\kappa \cdot 360^\circ + \omega) = \epsilon\varphi\omega$
 - $\sigma\varphi(\kappa \cdot 360^\circ + \omega) = \sigma\varphi\omega$
- , $\kappa \in \mathbb{Z}$. (τύποι Α)

(6) Πρόσημο Τριγωνομετρικών Αριθμών.

Σύμφωνα με τους παραπάνω ορισμούς, ένας τριγωνομετρικός αριθμός δύναται να έχει και αρνητική τιμή. Το πρόσημο εξαρτάται από το τεταρτημόριο στο οποίο βρίσκεται η τελική πλευρά. Για παράδειγμα αν μια γωνία έχει τελική πλευρά που βρίσκεται στο 2^ο τεταρτημόριο, τότε η γωνία αυτή θα έχει θετικό ημίτονο και όλους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς αρνητικούς (βλ. εφαρμογή 1). Ένας χρήσιμος μνημονικός κανόνας, ο κανόνας «ΟΗΕΣ», περιγράφεται στο παρακάτω σχήμα:



ΣΧ. 9

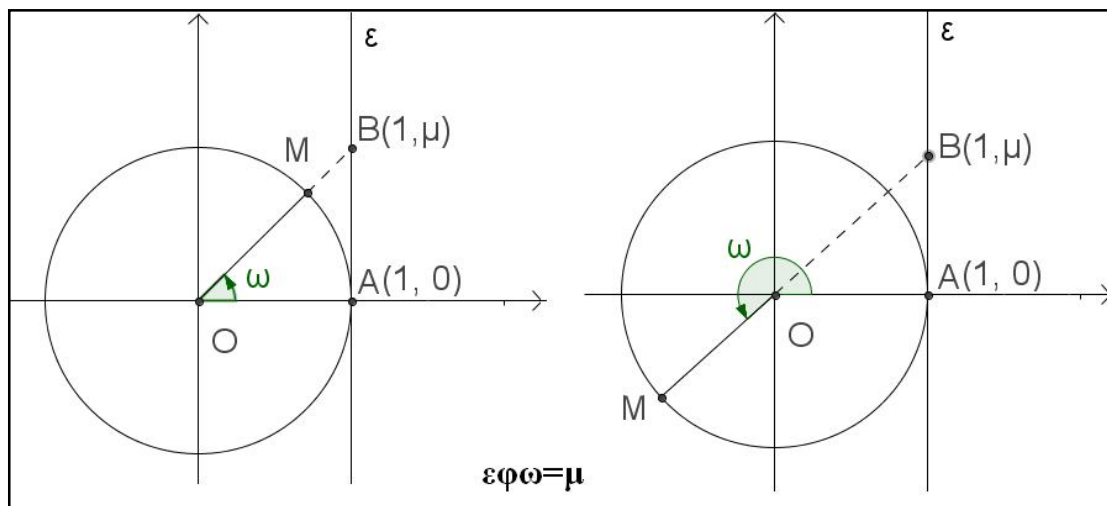
- Το Ο σημαίνει «όλα», και με αυτό τον τρόπο εννοούμε ότι όλοι οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών των οποίων η τελική πλευρά βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο είναι θετικοί.
- Το «Η» αναφέρεται στη λέξη «ημίτονο» και σημαίνει ότι οι γωνίες με τελική πλευρά που βρίσκεται στο 2^ο τεταρτημόριο έχουν μόνο το ημίτονο θετικό και όλους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς αρνητικούς.
- Το «Ε» αναφέρεται στην εφαπτομένη και το «ΣΦ» στη συνεφαπτομένη. Αυτό σημαίνει ότι οι γωνίες με τελική πλευρά που βρίσκεται στο 3^ο τεταρτημόριο έχουν μόνο την εφαπτομένη και συνεφαπτομένη θετική και όλους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς αρνητικούς.
- Τέλος, το «Σ» αναφέρεται στο συνημίτονο και σημαίνει ότι οι γωνίες με τελική πλευρά που βρίσκεται στο 4^ο τεταρτημόριο έχουν μόνο το συνημίτονο θετικό και όλους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς αρνητικούς.

Για παράδειγμα ισχύει $\sin 280^\circ > 0$, $\eta\mu 280^\circ < 0$, $\epsilon\phi 280^\circ < 0$ και $\sigma\phi 280^\circ < 0$, διότι η τελική πλευρά της τριγωνομετρικής γωνίας 280° βρίσκεται στο 4^ο τεταρτημόριο.

(7) Ο άξονας των Εφαπτομένων

Ορισμός 6: Έστω ο τριγωνομετρικός κύκλος και το σημείο του $A(1,0)$. Από το σημείο Α φέρνουμε την εφαπτομένη ϵ του τριγωνομετρικού κύκλου (βλ. σχήμα 10). Η ευθεία ϵ ονομάζεται **άξονας των εφαπτομένων**.

Έστω ω μια τριγωνομετρική γωνία με πλευρά την OM (σχ. 10). Προεκτείνουμε κατάλληλα την OM , ώστε να συναντήσει τον άξονα των εφαπτομένων σε ένα σημείο B . Το σημείο αυτό έχει συντεταγμένες της μορφής $B(1, \mu)$, όπου $\mu \in \mathbf{R}$. Αποδεικνύεται ότι $\varepsilon\omega = \mu$.

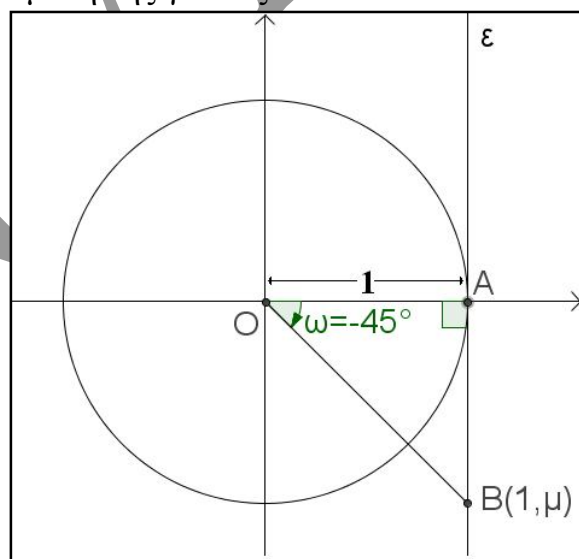


ΣΧ. 10

Εφαρμογή 2: Να υπολογίσετε την εφαπτομένη της γωνίας $\omega = -45^\circ$.

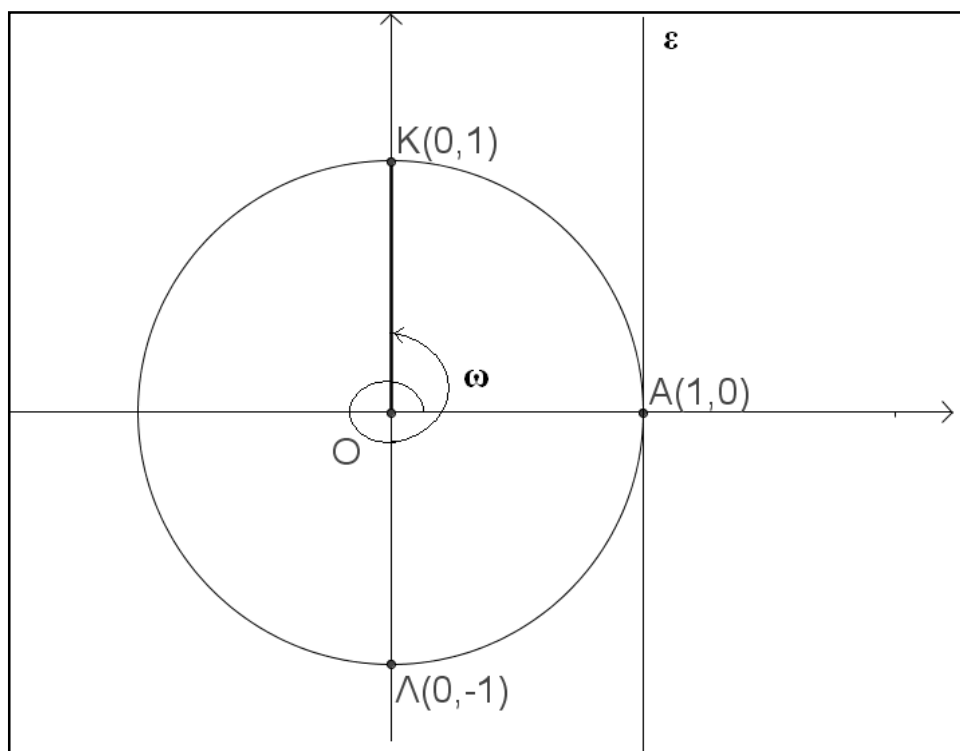
Απάντηση:

Στο διπλανό σχήμα βλέπουμε ότι στο τρίγωνο AOB ισχύει $\hat{AOB} = 45^\circ$. Επομένως το ορθογώνιο τρίγωνο AOB είναι ισοσκελές (διότι $\hat{AOB} = \hat{OBA}$). Άρα $AB = OA = 1$. Αυτό σημαίνει ότι το σημείο B έχει τεταγμένη ίση με $\mu = -1$. Δηλαδή $B(1, -1)$ και επομένως $\varepsilon\phi(-45^\circ) = -1$.



Παρατήρηση: Στις γωνίες με τελική πλευρά την OK ή την OL (σχ. 11) δεν ορίζεται εφαπτομένη, διότι η τετμημένη των σημείων K και L είναι ίση με μηδέν. Με άλλα λόγια, δεν μπορούμε να ορίσουμε εφαπτομένη στις γωνίες με τελική πλευρά παράλληλη στον άξονα των εφαπτομένων. Οι γωνίες αυτές είναι της μορφής $\omega = \kappa \cdot 180^\circ + 90^\circ$, $\kappa \in \mathbf{Z}$. Αν ο ακέραιος κ είναι άρτιος τότε η γωνία ω έχει τελική πλευρά την OK , διαφορετικά αν ο κ είναι περιττός τότε έχει τελική πλευρά την OL .



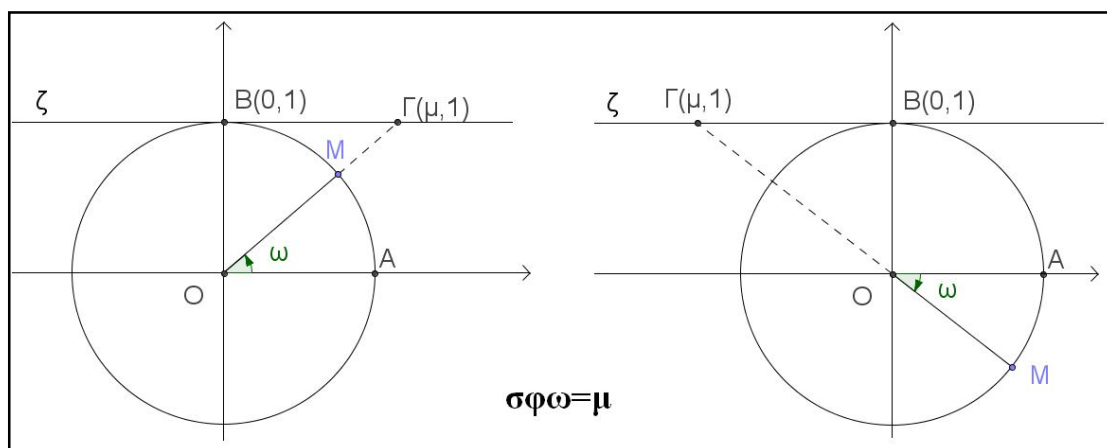


ΣΧ. 11

(8) Ο άξονας των Συνεφαπτομένων

Ορισμός 7: Έστω ο τριγωνομετρικός κύκλος και το σημείο του $B(0,1)$. Από το σημείο B φέρνουμε την εφαπτομένη ζ του τριγωνομετρικού κύκλου (βλ. σχήμα 12). Η ευθεία ε ονομάζεται άξονας των συνεφαπτομένων.

Έστω ω μια τριγωνομετρική γωνία με πλευρά την OM (σχ. 12). Προεκτείνουμε κατάλληλα την OM , ώστε να συναντήσει τον άξονα των συνεφαπτομένων σε ένα σημείο Γ . Το σημείο αυτό έχει συντεταγμένες της μορφής $\Gamma(\mu,1)$, όπου $\mu \in \mathbf{R}$. Αποδεικνύεται ότι $\sigma\omega = \mu$.

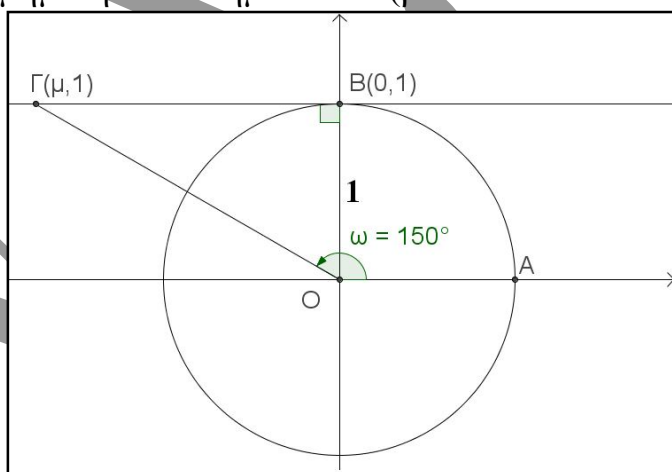


ΣΧ. 12

Εφαρμογή 3: Να υπολογίσετε την συνεφαπτομένη της γωνίας $\omega = 150^\circ$.

Απάντηση:

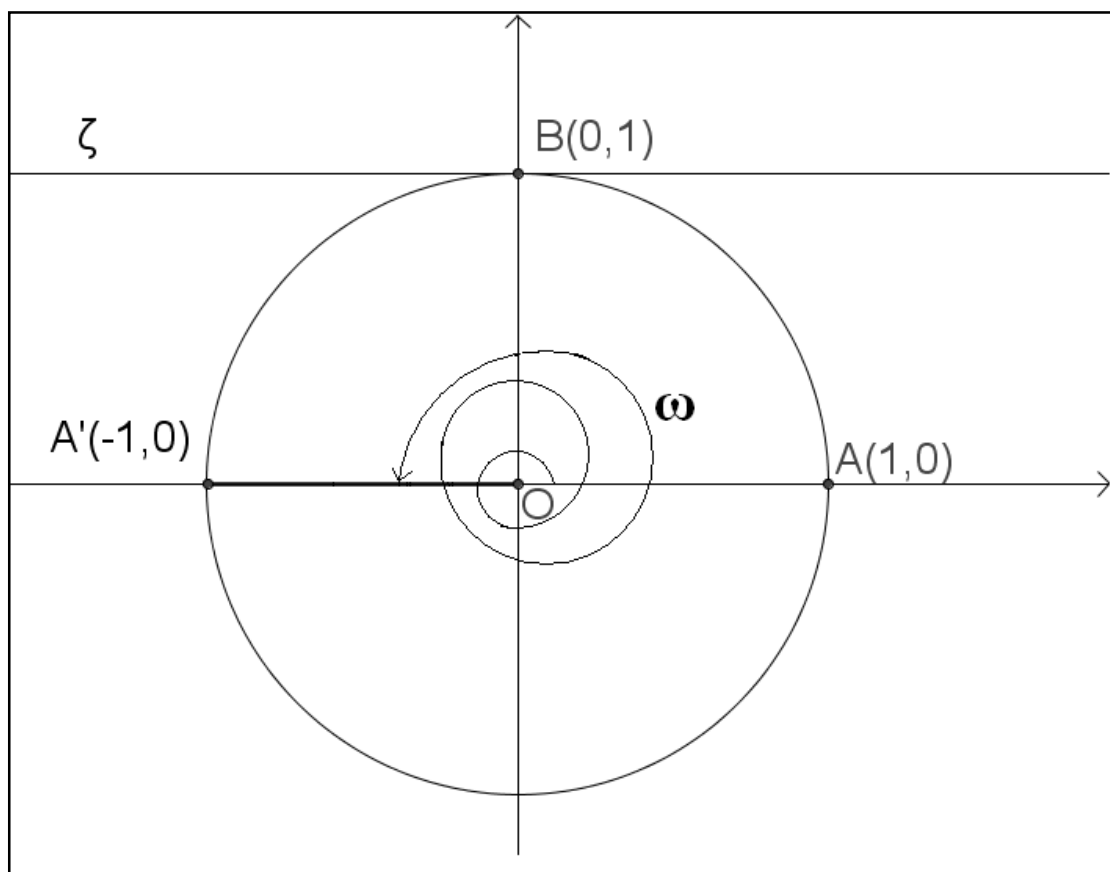
Αρκεί να υπολογίσουμε την τετμημένη του σημείου Γ (βλ. διπλανό σχήμα). Επειδή $\angle A\hat{O}\Gamma = 150^\circ$, τότε $\angle B\hat{O}\Gamma = 60^\circ$. Άρα $\angle B\hat{\Gamma}O = 30^\circ$. Από τη γεωμετρία γνωρίζουμε ότι αν ένα ορθογώνιο τρίγωνο έχει μια γωνία ίση με 30° , τότε η απέναντι πλευρά είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας. Επειδή $OB=1$, έπεται ότι $OG=2$. Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα προκύπτει



ότι $B\Gamma = \sqrt{OG^2 - OB^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$. Επομένως το σημείο Γ έχει τετμημένη ίση με $-\sqrt{3}$, δηλαδή $\Gamma(-\sqrt{3}, 1)$. Άρα $\sigma\phi 150^\circ = -\sqrt{3}$.

Παρατήρηση: Στις γωνίες με τελική πλευρά την OA ή την OA' (σχ. 13) δεν ορίζεται συνεφαπτομένη, διότι η τεταγμένη των σημείων A και A' είναι ίση με μηδέν. Με άλλα λόγια, δεν μπορούμε να ορίσουμε συνεφαπτομένη στις γωνίες με τελική πλευρά παράλληλη στον άξονα των συνεφαπτομένων. Οι γωνίες αυτές είναι της μορφής $\omega = \kappa \cdot 180^\circ$, $\kappa \in \mathbb{Z}$. Αν ο ακέραιος κ είναι άρτιος τότε η γωνία ω έχει τελική πλευρά την OA , διαφορετικά αν ο κ είναι περιττός τότε έχει τελική πλευρά την OA' .





ΣΧ. 13

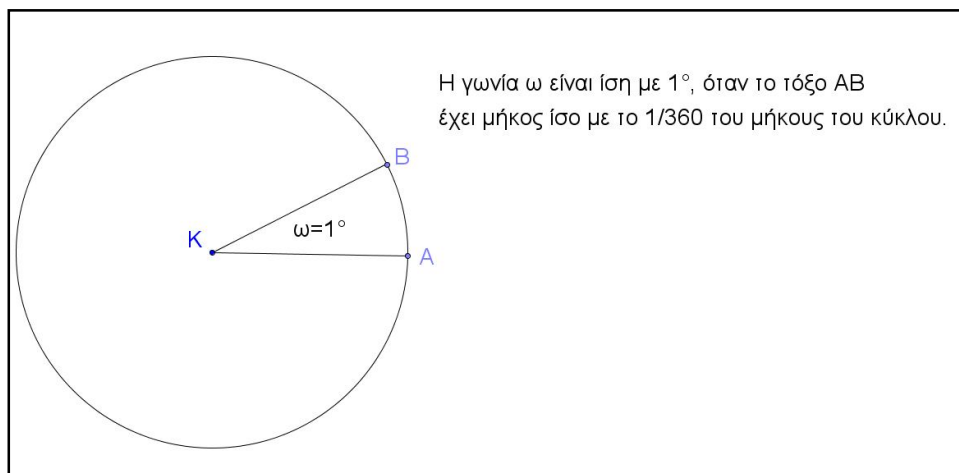
(9) Μονάδες μέτρησης γωνιών

Όπως γνωρίζουμε από τη Φυσική και τη Χημεία τα μεγέθη μπορούν να εκφράζονται σε διαφορετικές μονάδες μέτρησης. Για παράδειγμα στο μήκος μπορούμε να χρησιμοποιούμε τα μέτρα, τα χιλιόμετρα, τις ίντσες, τα πόδια κ.τ.λ. Έτσι και η γωνία, ως μέγεθος, μπορεί να εκφράζεται σε διαφορετικές μονάδες όπως είναι οι μοίρες (degrees ή πιο απλά deg), τους βαθμούς (grades ή πιο απλά grad) και τα ακτίνια (radians ή πιο απλά rad). Ενδεικτικός είναι ο παρακάτω πίνακας με μεγέθη και διάφορες μονάδες μέτρησης:

Μέγεθος	Μερικές μονάδες μέτρησης
Μήκος	m, km, cm, inch (ίντσες), ft (πόδια)
Δύναμη	Nt, p, kp
Γωνία	μοίρες (deg), βαθμοί (grad), ακτίνια (rad)

Παρακάτω θα ασχοληθούμε με τις μονάδες μέτρησης της γωνίας.

- **Μοίρες (deg):** Ως μία μοίρα (1°) ορίζουμε το μέτρο της επίκεντρης γωνίας που βαίνει σε τόξο με μήκος ίσο με το $1/360$ του μήκος ολόκληρου του κύκλου. Η μία μοίρα χωρίζεται σε 60 λεπτά ($60'$) και το ένα λεπτό σε 60 δεύτερα ($60''$). Επειδή η μία μοίρα είναι πολύ μικρή γωνία, στο παρακάτω σχήμα (σχ. 14) η γωνία ω δεν είναι



ΣΧ. 14

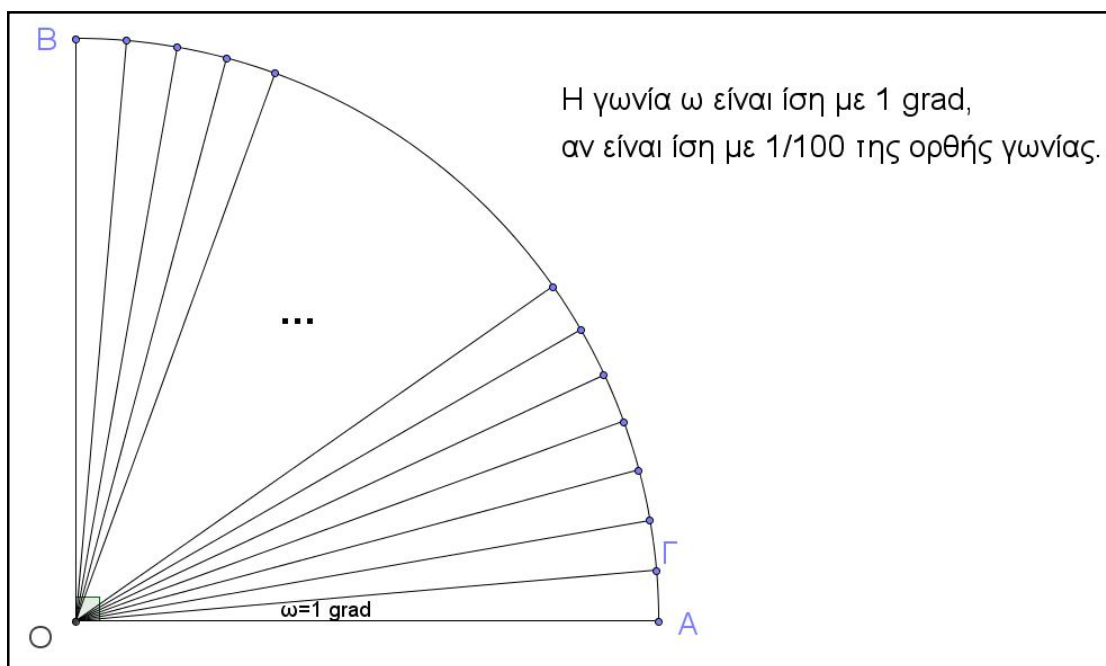
στα αλήθεια ίση με 1° , αλλά το σχήμα περιγράφει πώς ορίζεται αυτή.

Ιστορικά δεν γνωρίζουμε πότε ακριβώς ξεκίνησε η συστηματική χρήση του κύκλου των 360° . Φαίνεται ότι ξεκίνησε από τον αρχαίο αστρονόμο Ίππαρχο (περίπου 180-125 π.Χ.) ο οποίος πιθανότατα επηρεάστηκε από τον Υψικλή. Ο Υψικλής είχε χωρίσει την ημέρα σε 360 μέρη, επηρεασμένος με τη σειρά του από τη Βαβυλωνιακή αστρονομία.*

- **Βαθμοί (grad):** Ως γωνία ενός βαθμού (1 grad) ορίζουμε τη γωνία που είναι ίση με το $1/100$ της ορθής γωνίας. Καθιερώθηκε από τους Γάλλους, κατά τη θεμελίωση του μετρικού συστήματος. Η γενικότερη θεμελίωση του μετρικού συστήματος ξεκινά από τα μέσα της Γαλλικής Επανάστασης, το 1790.[†] Παρακάτω, δεν θα ασχοληθούμε με αυτή τη μονάδα μέτρησης. Απλώς την αναφέραμε για ιστορικούς λόγους.

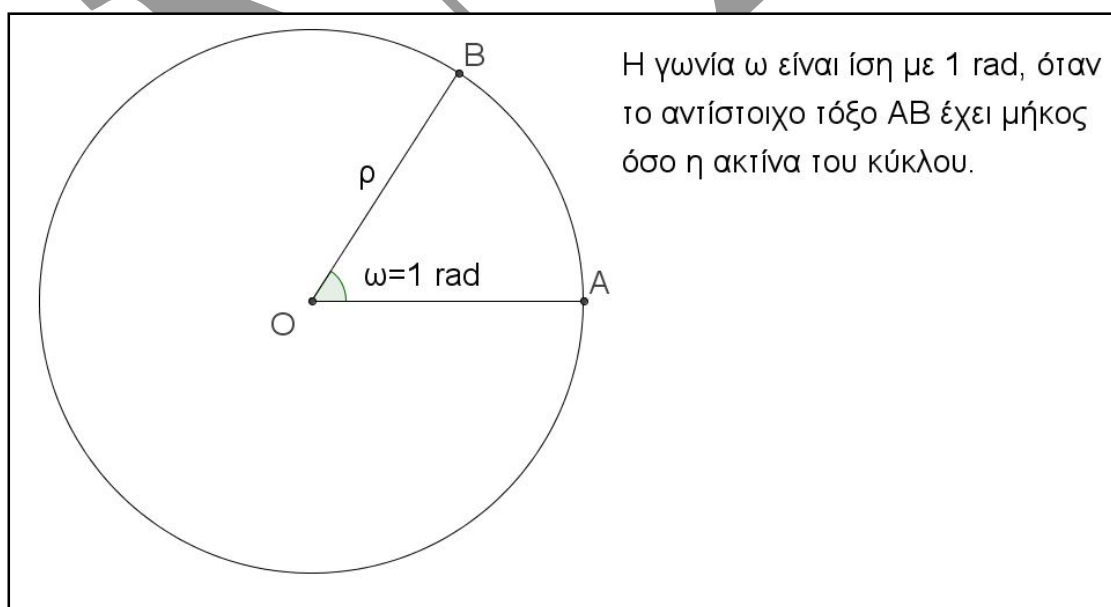
* Η πηγή προέρχεται από το βιβλίο «Η ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ», των C.B. Boyer και U.C. Mezbach, Εκδ. Γ.Α. Πνευματικού (2^η Έκδοση, 1997).

[†] http://www.eim.gr/EIMv1/html/greek/metrology/istoria/istoria_si.html



ΣΧ. 15

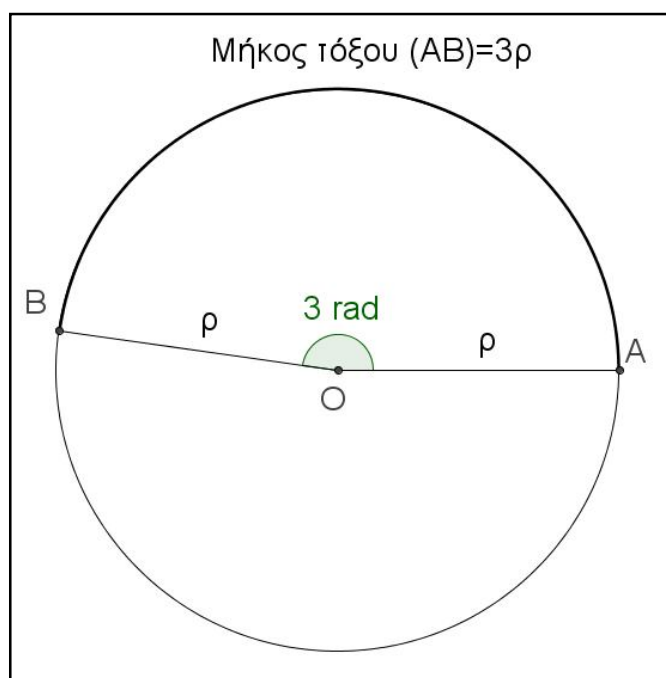
- **Ακτίνα (rad):** Ως μέτρο γωνίας ενός ακτινίου ή rad, εννοούμε εκείνη την επίκεντρη γωνία της οποίας το αντίστοιχο τόξο είναι ίσο με μία ακτίνα του κύκλου.



ΣΧ. 16

Προφανώς μια επίκεντρη γωνία με μέτρο 2 rad θα έχει αντίστοιχο μήκος τόξου 2 ακτίνες, μια γωνία 3 rad θα έχει μήκος τόξου 3

ακτίνες κ.ο.κ. Επομένως όταν μια επίκεντρη γωνία έχει μέτρο α rad, τότε το αντίστοιχο τόξο θα έχει μήκος $S=\alpha \cdot \rho$, όπου ρ είναι η ακτίνα του κύκλου.

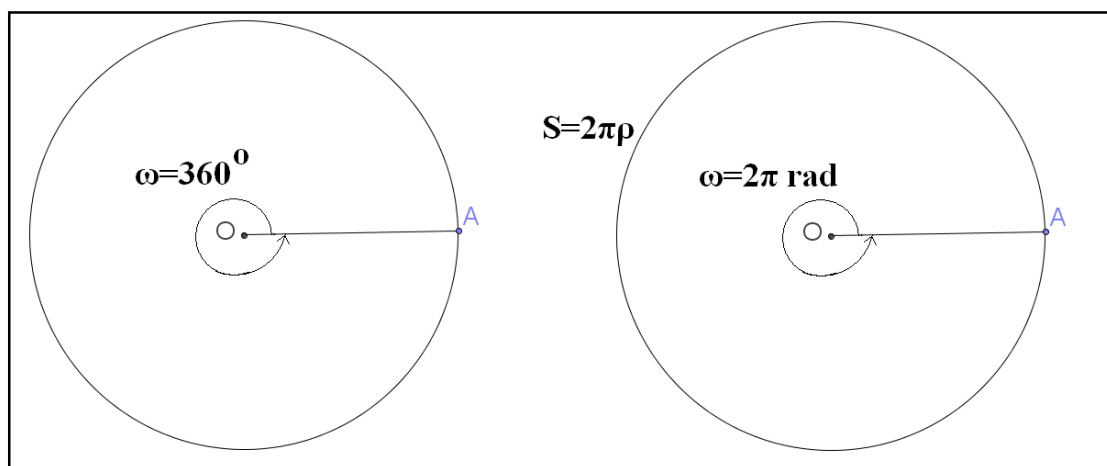


ΣΧ. 17

(10) Μετατροπή μοιρών σε ακτίνια και αντίστροφα

Στην επόμενη ενότητα, θα δούμε για ποιο λόγο προτιμούμε να χρησιμοποιούμε τα ακτίνια αντί για τις μοίρες. Προς το παρόν θα μάθουμε πώς να εκφράζουμε το μέτρο μιας γωνίας σε ακτίνια, όταν γνωρίζουμε το μέτρο της σε μοίρες και αντίστροφα.

Καταρχάς, να αναφέρουμε ότι από τον τρόπο που ορίστηκαν οι μοίρες και τα ακτίνια, έπεται ότι συνδέονται με μια σχέση αναλογίας,. Για να βρούμε αυτή τη σχέση αναλογίας, αρκεί λοιπόν να βρούμε μια γωνία ης οποίας να ξέρουμε το μέτρο της τόσο σε μοίρες, όσο και σε ακτίνια. Αν θεωρήσουμε ολόκληρη την περιφέρεια του κύκλου, τότε η αντίστοιχη επίκεντρη γωνία ω σε μοίρες είναι 360° . Επειδή το τόξο-περιφέρεια του κύκλου έχει μήκος $2\pi \cdot \rho$, όπου ρ είναι η ακτίνα του κύκλου, τότε από τον ορισμό του ακτινίου προκύπτει ότι η ίδια γωνία ω σε rad έχει μέτρο 2π (βλ. σχήμα 18):



ΣΧ. 18

Αφού οι μοίρες και τα ακτίνια είναι ποσά ανάλογα και επειδή μια γωνία 360° είναι ίση με μια γωνία 2π rad, μπορούμε να εφαρμόσουμε τη μέθοδο των τριών ως εξής:

Η γωνία των 360 μοιρών είναι ίση με τη γωνία 2π rad.
 Η γωνία των μ μοιρών είναι ίση με τη γωνία α rad.

$$\text{Άρα } \alpha \cdot 360 = \mu \cdot 2\pi \Leftrightarrow \alpha \cdot 180 = \mu \cdot \pi \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu}{180}.$$

Στις επόμενες εφαρμογές θα δούμε πώς μετατρέπουμε τις μοίρες σε ακτίνια και αντίστροφα:

Εφαρμογή 4: Να εκφράσετε τη γωνία $\omega = 30^\circ$ σε ακτίνια.

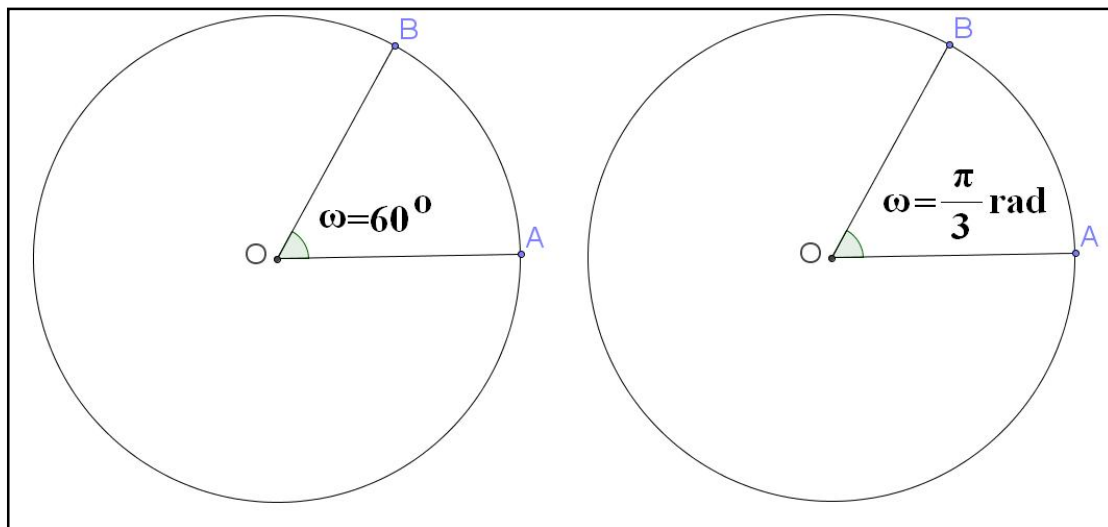
Λύση: Από τη σχέση $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu}{180}$, τότε για $\mu = 30^\circ$ προκύπτει:

$$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{30}{180} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\pi} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}. \text{ Άρα } 30^\circ = \frac{\pi}{6} \text{ rad.}$$

Εφαρμογή 5: Να εκφράσετε τη γωνία $\omega = \frac{\pi}{3}$ rad σε μοίρες.

Λύση: Από τη σχέση $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu}{180}$, τότε για $\alpha = \frac{\pi}{3}$ rad προκύπτει:

$$\frac{\frac{\pi}{3}}{\pi} = \frac{\mu}{180} \Leftrightarrow \frac{1}{3} = \frac{\mu}{180} \Leftrightarrow \mu = \frac{180}{3} = 60. \text{ Άρα } \frac{\pi}{3} \text{ rad} = 60^\circ.$$



ΣΧ. 19

Παρατηρήσεις:

- Όπως ισχύει $3 \neq 300$, αλλά $3\text{m} = 300\text{cm}$, έτσι ισχύει και $\frac{\pi}{3} \neq 60$ (αφού $\frac{\pi}{3} \cong 1,047$)*, αλλά $\frac{\pi}{3} \text{ rad} = 60^\circ$.
- Ισχύει $\pi \text{ rad} = 180^\circ$ και $\frac{\pi}{2} \text{ rad} = 90^\circ$ και $2\pi \text{ rad} = 360^\circ$. Επίσης ισχύει ότι $1 \text{ rad} = \frac{180}{\pi} \text{ μοίρες} \cong 57,3^\circ$.
- Οι τύποι Α όταν οι γωνίες εκφράζονται σε rad μετασχηματίζονται ως εξής:

- $\eta\mu(\kappa \cdot 2\pi + \omega) = \eta\mu\omega$
- $\sigma\upsilon\nu(\kappa \cdot 2\pi + \omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$
- $\epsilon\phi(\kappa \cdot 2\pi + \omega) = \epsilon\phi\omega$
- $\sigma\phi(\kappa \cdot 2\pi + \omega) = \sigma\phi\omega$

, $\kappa \in \mathbb{Z}$. (Τύποι Α')

* Το σύμβολο « $\cong$ » σημαίνει περίπου ίσο.



Σύμφωνα με αυτά που αναφέραμε παραπάνω για τις εφαπτομένες και συνεφαπτομένες, ισχύει ότι για τις γωνίες της μορφής $\omega = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ rad, και τις γωνίες της μορφής $\varphi = \kappa\pi$ rad όπου $\kappa \in \mathbf{Z}$,

δεν ορίζονται εφαπτομένη και συνεφαπτομένη αντίστοιχα.

- Μία σύμβαση που κάνουμε είναι ότι όταν δεν γράφουμε τη μονάδα μέτρησης της γωνίας σε έναν τριγωνομετρικό αριθμό, τότε θα εννοούμε ότι η γωνία εκφράζεται σε rad. Για παράδειγμα, όταν γράφουμε «ημ30» εννοούμε «ημ(30 rad)», ενώ το ημίτονο των 30 μοιρών δηλώνεται όπως ξέρουμε ως «ημ30°».
- Μπορούμε εύκολα να συνάγουμε τον εξής **Τριγωνομετρικό Πίνακα**:



ω σε μοίρες	ω σε rad	ημ ω	συν ω	εφ ω	σφ ω
0	0	0	1	0	Δεν ορίζεται
30	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90	$\frac{\pi}{2}$	1	0	Δεν ορίζεται	0

(11) Η αναγκαιότητα για χρήση των ακτινίων αντί των μοιρών.

Η ανακάλυψη και η χρήση των ακτινίων αντί των μοιρών ως μονάδα μέτρησης των γωνιών οφείλεται στο μαθηματικό Roger Cotes (1714)*. Στο σύστημα S.I. η μονάδα μέτρησης των γωνιών είναι τα rad. Για ποιο λόγο όμως να χρησιμοποιήσουμε τα ακτίνια έναντι των μοιρών; Στην πραγματικότητα, η χρήση των μοιρών έλκει την καταγωγή της έμμεσα από την Βαβυλωνιακή Αστρονομία, ενώ η χρήση των ακτινίων εξυπηρετεί μαθηματικούς σκοπούς. Χρησιμοποιώντας ακτίνια κάποιοι τριγωνομετρικοί τύποι απλουστεύονται†. Επιπλέον αποδεικνύεται ότι

* <http://en.wikipedia.org/wiki/Radian>

† Για παράδειγμα, όσοι είναι εξοικειωμένοι με το διαφορικό λογισμό γνωρίζουν ότι $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\eta x$, όταν το x εκφράζεται σε ακτίνια. Αντίθετα αν το x εκφράζεται σε μοίρες, τότε ισχύει $(\eta\mu x^\circ)' = (\eta\mu((\pi x/180)\text{rad}))' = (\pi/180)\sigma\upsilon\eta x^\circ$.

όταν οι γωνίες x εκφράζονται σε rad, τότε αν αυτές είναι πολύ κοντά στο μηδέν ισχύει $\eta\mu x \approx x^*$. Ενδεικτικοί είναι οι παρακάτω πίνακες:

ΠΙΝΑΚΑΣ 1	
ω σε μοίρες	$\eta\mu(\omega^\circ)$
1	0,01745
0,5	0,00872
0,4	0,00698
0,3	0,00523
0,1	0,00174

ΠΙΝΑΚΑΣ 2	
ω σε rad	$\eta\mu(\omega \text{ rad})$
1	<u>0,84147</u>
0,5	<u>0,47942</u>
0,4	<u>0,38941</u>
0,3	<u>0,29552</u>
0,1	<u>0,09983</u>

Βλέπουμε στον πίνακα 2 ότι όταν χρησιμοποιούμε ακτίνια, τότε προσεγγίζουμε ικανοποιητικά το ημίτονο μιας γωνίας από την ίδια τη γωνία. Δεν συμβαίνει το ίδιο όμως στην περίπτωση που χρησιμοποιούμε μοίρες. Εφαρμογή αυτής της προσέγγισης συναντάμε στην περίπτωση του απλού εκκρεμούς όπου η προσέγγιση $\eta\mu\theta \approx \theta$, για θ πολύ κοντά στο μηδέν, οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η ταλάντωση του εκκρεμούς δίνεται

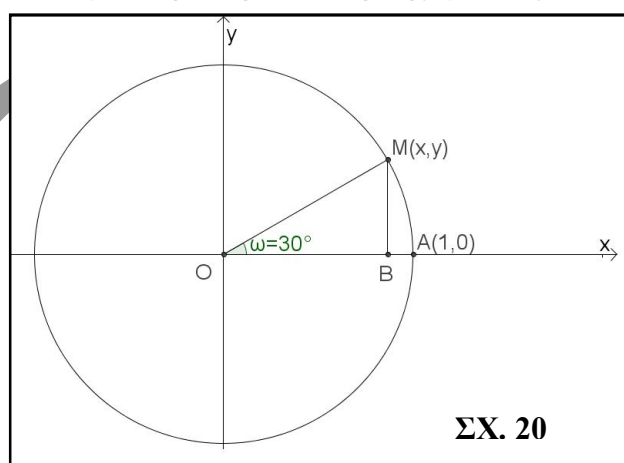
από τον τύπο $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$, όπου l είναι το μήκος του νήματος και g η βαρυτική επιτάχυνση.[†]

(12) Παραδείγματα.

Παράδειγμα 1: Να αποδείξετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς που ισχύουν στον τριγωνομετρικό πίνακα για την περίπτωση της γωνίας των 30° .

Λύση: Έστω η τριγωνομετρική γωνία $\omega = 30^\circ$ (βλ. σχήμα 20).

Αρκεί να βρούμε τις συντεταγμένες του σημείου M . Επειδή η τελική πλευρά της γωνίας ω βρίσκεται στο 1^ο τεταρτημόριο, έπεται ότι $x = OB$ και $y = BM$. Όμως στο



ΣΧ. 20

* Για όσους είναι εξοικειωμένοι με τα όρια, αυτό προκύπτει από τη γνωστή ισότητα $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$, όπου

το x εκφράζεται σε rad.

[†]Βλέπε wikipedia.

ορθογώνιο τρίγωνο OMB ισχύει $\hat{M}\hat{O}B = 30^\circ$. Από τη γεωμετρία γνωρίζουμε ότι αν ένα ορθογώνιο τρίγωνο έχει μια οξεία γωνία ίση με 30 μοίρες, τότε η απέναντι πλευρά είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

Επειδή $OM=1$, έπεται ότι $MB=\frac{1}{2}$. Με εφαρμογή του Πυθαγορείου

Θεωρήματος, προκύπτει ότι $OB=\sqrt{OM^2 - MB^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Άρα $\eta\mu\omega=y=\frac{1}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu\omega=x=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ακόμη $\epsilon\phi\omega=\frac{y}{x}=\dots=\frac{\sqrt{3}}{3}$ και $\sigma\phi\omega=$

$$\frac{x}{y}=\dots=\sqrt{3}.$$

Παράδειγμα 2: Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών: (α) -1740° και (β) $\frac{25\pi}{4}$ rad.

Λύση:

(α) Θα εκφράσουμε τη γωνία -1740° στη μορφή $\kappa \cdot 360^\circ + \omega$, όπου $0^\circ \leq \omega < 360^\circ$ και κ ακέραιος αριθμός. Τότε σύμφωνα με τους τύπους Α, θα ισχύει ότι οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας -1740° θα είναι ίσοι με αυτούς της γωνίας ω .^{*} Για αυτό το λόγο εκτελούμε την ευκλείδεια διαίρεση 1740 με το 360 :

$$\begin{array}{r|l} 1740 & 360 \\ \hline 1440 & 4 \\ \hline 300 & \end{array}$$

Επομένως ισχύει $1740=4 \cdot 360+300$. Πολλαπλασιάζοντας με -1 προκύπτει ότι $-1740=-4 \cdot 360-300$. Ο αριθμός -300 δεν ανταποκρίνεται στη γωνία ω που θέλουμε να εκφράσουμε, διότι ο αριθμός αυτός δεν ανήκει στο διάστημα $[0,360)$. Για αυτό το λόγο, προσθαφαιρούμε τον αριθμό 360 και προκύπτει:

$-1740=-4 \cdot 360-360+360-300=-5 \cdot 360+60$. Δηλαδή ισχύει ότι $-1740^\circ=-5 \cdot 360^\circ+60^\circ$. Σύμφωνα με τους τύπους Α, οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των -1740° θα είναι ίδιοι με τους τριγωνομετρικούς αριθμούς

της γωνίας 60° . Επομένως $\eta\mu(-1740^\circ)=\eta\mu 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\sigma\upsilon\nu(-1740^\circ)=\sigma\upsilon\nu 60^\circ=\frac{1}{2}$ κ.τ.λ.

^{*} Να τονίσουμε ωστόσο ότι οι τύποι Α ισχύουν για κάθε γωνία ω και όχι μόνο για αυτές που ανήκουν στο διάστημα $[0^\circ, 360^\circ)$.

(β) Θα εκφράσουμε τη γωνία $\frac{25\pi}{4}$ rad στη μορφή $(\kappa \cdot 2\pi + \omega)$ rad, όπου $0 \text{ rad} \leq \omega < 2\pi \text{ rad}$ και κ ακέραιος αριθμός. Τότε σύμφωνα με τους τύπους Α', θα ισχύει ότι οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας $\frac{25\pi}{4}$ rad θα είναι ίσοι με αυτούς της γωνίας ω .*

$$\frac{25\pi}{4} = \frac{25}{4 \cdot 2} 2\pi = \frac{25}{8} 2\pi = \frac{3 \cdot 8 + 1}{8} 2\pi = \left(3 + \frac{1}{8}\right) \cdot 2\pi = 3 \cdot 2\pi + \frac{2\pi}{8} = 3 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{4}.$$

Το σκεπτικό στις παραπάνω πράξεις εστιάζεται σε 2 σημεία:

- Να σχηματίσουμε την παράσταση 2π .
- Να χρησιμοποιήσουμε την ισότητα $25=3 \cdot 8+1$ που προκύπτει από την ευκλείδεια διαίρεση του 25 με το 8. Μετά από πράξεις και απλοποίηση θα προκύψει ο όρος της μορφής $\kappa \cdot 2\pi$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Άρα } \frac{25\pi}{4} \text{ rad} = \left(3 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{4}\right) \text{ rad}.$$

Επομένως οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας $\frac{25\pi}{4}$ rad ταυτίζονται με αυτούς της γωνίας $\frac{\pi}{4}$ rad. Δηλαδή $\eta\mu\left(\frac{25\pi}{4}\right) = \eta\mu\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ κ.τ.λ.

Παράδειγμα 3: Να υπολογίσετε το πρόσημο των τριγωνομετρικών αριθμών της γωνίας $\varphi=1650^\circ$.

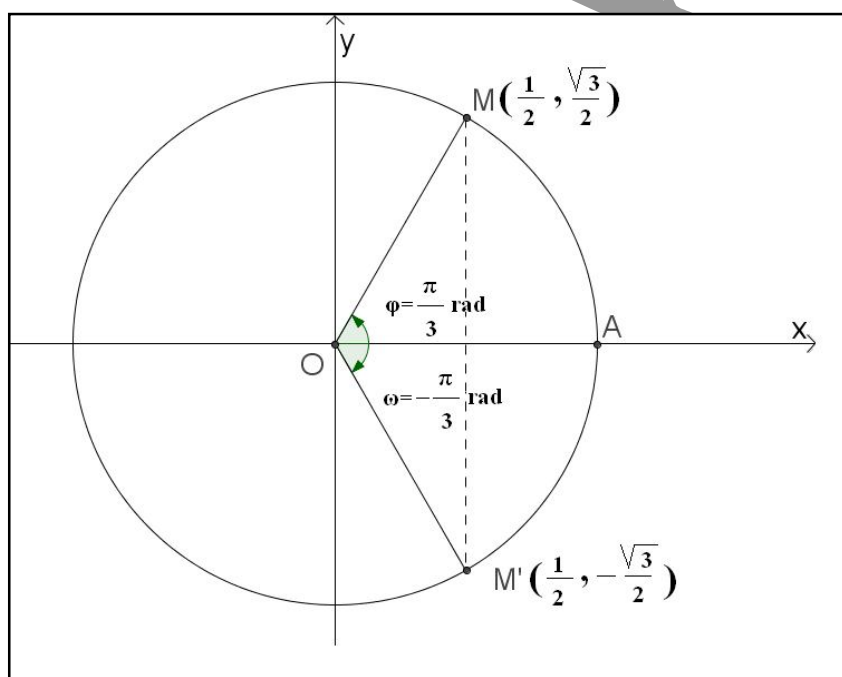
Λύση: Όπως γνωρίζουμε, το πρόσημο των τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας εξαρτάται από το τεταρτημόριο στο οποίο βρίσκεται η τελική πλευρά της γωνίας αυτής. Από την άλλη, δυο γωνίες φ και ω , εκφρασμένες σε μοίρες, έχουν την ίδια τελική πλευρά αν και μόνο αν συνδέονται από μια σχέση της μορφής $\varphi = \kappa \cdot 360^\circ + \omega$, όπου κ ένας ακέραιος αριθμός. Θα εκφράσουμε λοιπόν τη γωνία $\varphi=1650^\circ$ με τη βοήθεια του προηγούμενου τύπου, όπου για τη γωνία ω επιπλέον θα ισχύει $0^\circ \leq \omega < 360^\circ$. Με αυτόν τον τρόπο θα προσδιορίσουμε σε ποιο τεταρτημόριο βρίσκεται η τελική πλευρά της γωνίας ω και άρα και της γωνίας φ . Εκτελώντας την ευκλείδεια διαίρεση του 1650 με το 360, προκύπτει ότι $1650^\circ = 4 \cdot 360^\circ + 210^\circ$. Επειδή η γωνία ω έχει μέτρο 210° ,

* Αντίστοιχα και με την προηγούμενη υποσημείωση, έτσι και εδώ οι τύποι Α' ισχύουν για κάθε γωνία ω και όχι μόνο για αυτές που ανήκουν στο διάστημα $[0 \text{ rad}, 2\pi \text{ rad})$.

έπεται ότι η τελική της πλευρά βρίσκεται στο 3^ο τεταρτημόριο και άρα το ίδιο ισχύει και για τη γωνία φ . Εφαρμόζοντας τον μνημονικό κανόνα του «ΟΗΕΣ» προκύπτει ότι $\eta\mu\varphi < 0$, $\sigma\upsilon\nu\varphi < 0$, $\epsilon\varphi\varphi > 0$ και $\sigma\varphi\varphi > 0$.

Παράδειγμα 4: Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\omega = -\frac{\pi}{3}$ rad.

Λύση: Καταρχάς θεωρούμε τη γωνία $\varphi = \frac{\pi}{3}$ rad. Αν OM είναι η τελική πλευρά της γωνίας φ , όπου M είναι το αντίστοιχο σημείο στον τριγωνομετρικό κύκλο, τότε το σημείο M θα έχει συντεταγμένες $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (γιατί;). Επομένως, η γωνία ω θα έχει τελική πλευρά την OM' όπου OM' είναι η συμμετρική της OM ως προς τον άξονα x'x. Λόγω αυτής της συμμετρίας έπεται ότι το M' θα έχει συντεταγμένες $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.



ΣΧ. 21

$$\text{Άρα } \eta\mu\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}, \epsilon\varphi\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{3} \text{ και}$$

$$\varepsilon\varphi\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Παράδειγμα 5: Να αποδείξετε ότι οι γωνίες ω και φ με μέτρα $\omega = (\rho \cdot 2\pi + \frac{3\pi}{7})$ rad και $\varphi = (\lambda \cdot 2\pi - \frac{11\pi}{7})$ rad, όπου ρ και λ δύο ακέραιοι αριθμοί, έχουν τους ίδιους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

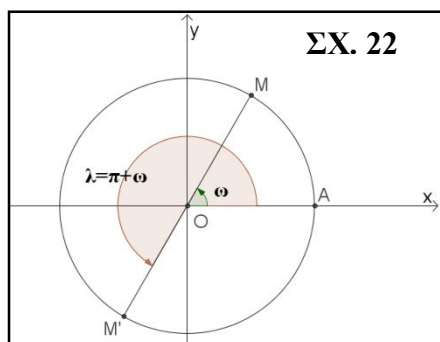
Λύση: Δύο γωνίες ω και φ γενικά έχουν τους ίδιους τριγωνομετρικούς αριθμούς, όταν έχουν την ίδια τελική πλευρά. Αυτό συμβαίνει όταν τα μέτρα τους συνδέονται από μια σχέση της μορφής $\omega = \kappa \cdot 2\pi + \varphi$, όπου κ ένας ακέραιος αριθμός και δεδομένου ότι τα μέτρα των γωνιών αυτών εκφράζονται σε rad. Έχουμε λοιπόν: $\omega - \varphi = (\rho \cdot 2\pi + \frac{3\pi}{7}) - (\lambda \cdot 2\pi - \frac{11\pi}{7}) =$

$$(\rho - \lambda) \cdot 2\pi + (\frac{3\pi}{7} + \frac{11\pi}{7}) = (\rho - \lambda) \cdot 2\pi + 2\pi = (\rho - \lambda + 1) \cdot 2\pi.$$

Δηλαδή $\omega = (\rho - \lambda + 1) \cdot 2\pi + \varphi$. Επειδή οι αριθμοί ρ , λ και 1 είναι ακέραιοι, τότε και ο αριθμός $\kappa = \rho - \lambda + 1$ είναι ακέραιος. Επομένως ισχύει $\omega = \kappa \cdot 2\pi + \varphi$, με κ ακέραιο αριθμό και άρα οι γωνίες ω και φ έχουν τους ίδιους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

Παράδειγμα 6 *: Έστω μια γωνία ω με τελική πλευρά την OM, όπου M σημείο του τριγωνομετρικού κύκλου. Αν M' είναι το συμμετρικό του M ως προς την αρχή O των αξόνων, τότε να αποδείξετε ότι κάθε γωνία φ με τελική πλευρά την OM ή την OM' θα έχει μέτρο της μορφής $\varphi = \rho \cdot \pi + \omega$ όπου ρ ακέραιος, δεδομένου ότι τα μέτρα των φ και ω εκφράζονται σε rad.

Λύση: Έστω γωνία ω με τελική πλευρά την OM (βλ. σχήμα 22). Τότε μια γωνία με τελική πλευρά την OM' είναι η $\lambda = \omega + \pi = \pi + \omega$.



Κάθε γωνία με τελική πλευρά την OM θα έχει μέτρο της μορφής $\kappa \cdot 2\pi + \omega = 2\kappa \cdot \pi + \omega$, όπου κ ακέραιος αριθμός. Η μορφή $2\kappa \cdot \pi$ αναφέρεται σε όλα τα άρτια πολλαπλάσια του π όπως: $0\pi = 0$ ($\kappa = 0$), 2π ($\kappa = 1$), -2π ($\kappa = -1$), 4π ($\kappa = 2$), -4π ($\kappa = -2$) κ.τ.λ.

* Αυτό το παράδειγμα είναι πολύ σημαντικό, διότι χρησιμοποιείται στις παρακάτω ενότητες για την απόδειξη διαφόρων θεωρημάτων.

Όμοια, κάθε γωνία με τελική πλευρά την OM' θα έχει μέτρο της μορφής $\kappa \cdot 2\pi + \pi + \omega = (2\kappa + 1) \cdot \pi + \omega$, όπου κ ακέραιος αριθμός. Η μορφή $(2\kappa + 1) \cdot \pi$ αναφέρεται σε όλα τα περιττά πολλαπλάσια του π όπως: $1\pi = 1$ ($\kappa = 0$), 3π ($\kappa = 1$), $-1\pi = -\pi$ ($\kappa = -1$), 5π ($\kappa = 2$), -3π ($\kappa = -2$) κ.τ.λ.

Ενδεικτικός είναι ο παρακάτω πίνακας:

	Γωνίες με τελική πλευρά την OM . $[2\kappa \cdot \pi + \omega]$	Γωνίες με τελική πλευρά την OM' . $[(2\kappa + 1) \cdot \pi + \omega]$
$\kappa = 0$	$0\pi + \omega$	$1\pi + \omega$
$\kappa = 1$	$2\pi + \omega$	$3\pi + \omega$
$\kappa = -1$	$-2\pi + \omega$	$-1\pi + \omega$
$\kappa = 2$	$4\pi + \omega$	$5\pi + \omega$
$\kappa = -2$	$-4\pi + \omega$	$-3\pi + \omega$
...	...	...
Μορφή	(Άρτιο πολ/σιο του π) + ω	(Περιττό πολ/σιο του π) + ω

Τελικό συμπέρασμα: Οι γωνίες της μορφής $\rho \cdot \pi + \omega$ έχουν τελική πλευρά την OM όταν ο ρ είναι άρτιος και τελική πλευρά την OM' όταν ο ρ περιττός, αλλά και αντίστροφα.

Παράδειγμα 7: Να βρεθούν όλες οι γωνίες φ με $-2\pi \text{ rad} \leq \varphi \leq 4\pi \text{ rad}$ που να έχουν τους ίδιους τριγωνομετρικούς αριθμούς με αυτούς της γωνίας $\omega = \frac{\pi}{8} \text{ rad}$.

Λύση: Κάθε γωνία φ που έχει τους ίδιους τριγωνομετρικούς αριθμούς με τη γωνία ω , έπεται ότι έχει την ίδια τελική πλευρά με τη γωνία ω και άρα κάθε γωνία φ θα έχει μέτρο, σε rad , της μορφής $\varphi = \kappa \cdot 2\pi + \omega$, δηλαδή

$\varphi = \kappa \cdot 2\pi + \frac{\pi}{8}$, όπου $\kappa \in \mathbf{Z}$. Όμως, $-2\pi \leq \varphi \leq 4\pi \Leftrightarrow -2\pi \leq \kappa \cdot 2\pi + \frac{\pi}{8} \leq 4\pi \Leftrightarrow -2\pi - \frac{\pi}{8} \leq \kappa \cdot 2\pi \leq 4\pi - \frac{\pi}{8} \Leftrightarrow -\frac{17\pi}{8} \leq \kappa \cdot 2\pi \leq \frac{31\pi}{8} \stackrel{:2\pi}{\Leftrightarrow} -\frac{17}{16} \leq \kappa \leq \frac{31}{16}$. Οι μοναδικοί ακέραιοι που ανήκουν στο διάστημα $[-\frac{17}{16}, \frac{31}{16}]$ είναι οι αριθμοί $\kappa_1 = -1$, $\kappa_2 = 0$, $\kappa_3 = 1$ και $\kappa_4 = 2$. Επομένως οι ζητούμενες γωνίες είναι:

$$\varphi_1 = -1 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{8} = -\frac{15\pi}{8}, \quad \varphi_2 = 0\pi + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{8}, \quad \varphi_3 = 2\pi + \frac{\pi}{8} = \frac{17\pi}{8} \quad \text{και} \quad \varphi_4 = 2 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{8} = \frac{33\pi}{8}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Να εκφράσετε σε ακτίνια τις παρακάτω γωνίες των οποίων τα μέτρα σε μοίρες είναι τα εξής:

α) $\omega_1 = 15^\circ$ β) $\omega_2 = -50^\circ$ γ) $\omega_3 = 120^\circ$ δ) $\omega_4 = 200^\circ$ ε) $\omega = -1240^\circ$.

2) Να εκφράσετε σε μοίρες τις παρακάτω γωνίες των οποίων τα μέτρα σε ακτίνια είναι τα εξής:

α) $\varphi_1 = \frac{\pi}{16} \text{ rad}$ β) $\varphi_2 = -\frac{5\pi}{3} \text{ rad}$ γ) $\varphi_3 = 103 \text{ rad}$ δ) $\varphi_4 = 6\pi \text{ rad}$
 ε) $\varphi_5 = \frac{4\pi}{5} \text{ rad}.$

3) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών:

α) $\omega_1 = 2220^\circ$ β) $\omega_2 = \frac{17\pi}{4} \text{ rad}$ γ) $\omega_3 = -1410^\circ$ δ) $\omega_4 = -9\pi \text{ rad}.$

4) Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

A) $\frac{\eta\mu 60^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 30^\circ \cdot \sigma\phi 30^\circ}{\epsilon\phi 30^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 60^\circ \cdot \eta\mu 30^\circ}.$

B) $\eta\mu \frac{\pi}{4} + \sigma\phi \frac{\pi}{6} - \epsilon\phi \frac{\pi}{3} - \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3}$

Γ) $\eta\mu 810^\circ + \sigma\upsilon\nu(-1050^\circ) + \epsilon\phi 1500^\circ$

5) Να υπολογίσετε τη μέγιστη και την ελάχιστη δυνατή τιμή των παραστάσεων:

α) $A = \eta\mu x + 3$

β) $B = 4 - 5\sigma\upsilon\nu x$

γ) $\Gamma = 3\eta\mu x + 2\sigma\upsilon\nu \psi - 1$

δ) $\Delta = \frac{5\eta\mu x}{3} + \sqrt{2}.$

Για ποιες τιμές των γωνιών x και y συμβαίνει αυτό;

6) Να αποδείξετε στις παρακάτω περιπτώσεις ότι οι γωνίες ω και ϕ έχουν τους ίδιους τριγωνομετρικούς αριθμούς. (Τα μέτρα των γωνιών ω και ϕ εκφράζονται σε rad).

α) $\omega = 2\rho\pi + \frac{20\pi}{3}, \quad \phi = 2\lambda\pi - \frac{10\pi}{3}$ όπου $\rho, \lambda \in \mathbf{Z}.$

β) $\omega = 2\kappa\pi - \frac{10\pi}{8}, \quad \phi = 2\lambda\pi + \frac{3\pi}{4}$ όπου $\rho, \kappa \in \mathbf{Z}.$

γ) $\omega = -4\kappa\pi + \frac{40\pi}{17}, \quad \phi = 10\lambda\pi + \frac{6\pi}{17}$ όπου $\rho, \lambda \in \mathbf{Z}.$

7) Να δείξετε ότι:

α) $\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x > \epsilon\phi x + \sigma\phi x$, για κάθε $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi).$

β) $\varepsilon\phi(4x) - \eta\mu(4x) > \sigma\upsilon\nu(4x) - \sigma\phi(4x)$, για κάθε $x \in (\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$.

8) Να εξετάσετε αν είναι δυνατές οι παρακάτω ισότητες:

α) $\eta\mu\omega = \frac{4}{\sqrt{5}+1}$ β) $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{6}{2+\sqrt{10}}$

9) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας:

α) $\omega = -\frac{\pi}{6}$ rad β) $\phi = \frac{5\pi}{6}$ rad

(Υπόδειξη: Στο β' ερώτημα να παραστήσετε στον τριγωνομετρικό κύκλο τη γωνία ϕ χρησιμοποιώντας την ισότητα $\frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$)

10) Δίνεται η γωνία $\theta = \frac{\pi}{10}$ rad.

A) Να εκφράσετε με έναν τύπο όλες τις γωνίες που έχουν τους ίδιους τριγωνομετρικούς αριθμούς με τη γωνία θ .

B) Από τις γωνίες που αναφέρονται στο προηγούμενο ερώτημα, να βρείτε αυτές που ανήκουν στο διάστημα $[-2\pi \text{ rad}, 2\pi \text{ rad}]$.

11) α) Να εκφράσετε με έναν τύπο όλες τις γωνίες που έχουν ημίτονο ίσο με τη μονάδα.

β) Με τη βοήθεια του προηγούμενου ερωτήματος, να λύσετε την εξίσωση $\eta\mu^2 x - 3\eta\mu x + 2 = 0$.*

* Με το συμβολισμό $\eta\mu^2 x$ εννοούμε την παράσταση $(\eta\mu x)^2$. Το ίδιο ισχύει και για τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

ΕΝΟΤΗΤΑ 2^η: ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ.

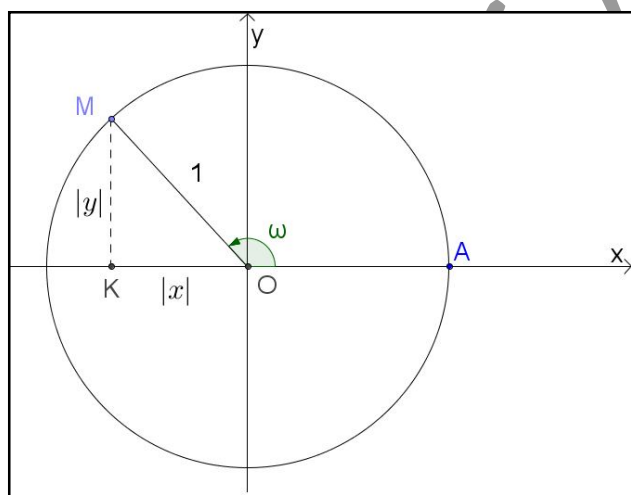
(1) Τριγωνομετρικές Ταυτότητες

Θεώρημα 1: Πυθαγόρεια Τριγωνομετρική Ταυτότητα (Π.Τ.Τ.)



Για κάθε $\omega \in \mathbf{R}^1$ ισχύει $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$.

Απόδειξη: Έστω ότι το $M(x,y)$ είναι το σημείο τομής της τελικής πλευράς της γωνίας ω με τον τριγωνομετρικό κύκλο (βλ. σχήμα 1). Τότε στο ορθογώνιο τρίγωνο OKM ισχύει $(OK) = |x|$, $(KM) = |y|$ και $(OM) = 1$. Με εφαρμογή του Πυθαγορείου Θεωρήματος έχουμε:



ΣΧ. 1

$$(OK)^2 + (KM)^2 = (OM)^2 \Leftrightarrow |x|^2 + |y|^2 = 1^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\omega + \eta\mu^2\omega = 1.$$

Προσέξτε ότι για την απόδειξη χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα $|A|^2 = A^2$.

Θεώρημα 2:



- Ισχύει ότι $\epsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$ για κάθε $\omega \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.
- Ισχύει ότι $\sigma\varphi\omega = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}$ για κάθε $\omega \neq k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

¹ Με έντονο $\mathbf{R}$ θα εννοούμε το σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Απόδειξη: Από το σχήμα 1 και από τον ορισμό των τριγωνομετρικών αριθμών προκύπτει ότι $\varepsilon\varphi\omega = \frac{y}{x} = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$ και $\sigma\varphi\omega = \frac{x}{y} = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}$. Για τους περιορισμούς βλέπετε στην πρώτη ενότητα, στις παραγράφους (7), (8) και στις παρατηρήσεις της παραγράφου (10).

Θεώρημα 3: Για κάθε $\omega \in \mathbf{R}$ με $\omega \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ και $\omega \neq k\pi$, όπου $k \in \mathbf{Z}$,



ισχύει ότι $\varepsilon\varphi\omega \cdot \sigma\varphi\omega = 1$. Δηλαδή οι τριγωνομετρικοί αριθμοί $\varepsilon\varphi\omega$ και $\sigma\varphi\omega$, όταν ορίζονται και οι δύο, είναι αντίστροφοι.

Απόδειξη: Προκύπτει άμεσα από το θεώρημα 2.

Θεώρημα 4: Για κάθε $\omega \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ με $k \in \mathbf{Z}$, ισχύουν οι παρακάτω ταυτότητες:

$$\text{A) } \sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1 + \varepsilon\varphi^2\omega} \text{ και B) } \eta\mu^2\omega = \frac{\varepsilon\varphi^2\omega}{1 + \varepsilon\varphi^2\omega}.$$

Απόδειξη: Για $\omega \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ με $k \in \mathbf{Z}$, ορίζεται η $\varepsilon\varphi\omega$ και τότε προκύπτει ότι:

$$\text{A) } 1 + \varepsilon\varphi^2\omega = 1 + \frac{\eta\mu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} + \frac{\eta\mu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}.$$

$$\text{Δηλαδή } 1 + \varepsilon\varphi^2\omega = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} \text{ και άρα } \sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1 + \varepsilon\varphi^2\omega}.$$

B) Από την (Π.Τ.Τ.) και από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε ότι

$$\eta\mu^2\omega = 1 - \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 - \frac{1}{1 + \varepsilon\varphi^2\omega} = \frac{\varepsilon\varphi^2\omega}{1 + \varepsilon\varphi^2\omega}.$$

(2) Παραδείγματα.

Παράδειγμα 1: Αν $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ και $\eta\mu x = -\frac{3}{5}$, τότε να βρεθούν οι υπόλοιποι τριγωνομετρικοί αριθμοί.

Λύση: Επειδή $x \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$, έπεται ότι $\eta\mu x < 0$, $\sigma\upsilon\nu x < 0$, $\varepsilon\varphi x > 0$ και $\sigma\varphi x > 0$.*

* Τα πρόσημα των τριγωνομετρικών αριθμών προκύπτουν εύκολα από τον κανόνα «ΟΗΕΣ».

Από την **(Π.Τ.Τ.)** έχουμε: $\sin^2 x = 1 - \eta\mu^2 x = 1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$.

Άρα $\sin x = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$ ή $\sin x = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}$. Άρα $\sin x = -\frac{4}{5}$.

Έπεται επομένως ότι $\epsilon\phi x = \frac{\eta\mu x}{\sin x} = \frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$ και $\sigma\phi x = \frac{1}{\epsilon\phi x} = \frac{4}{3}$.

Παράδειγμα 2: Αν $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ και $\sigma\phi x = -\frac{1}{3}$, τότε να βρεθούν οι υπόλοιποι τριγωνομετρικοί αριθμοί.

Λύση: Επειδή $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, έπεται ότι $\eta\mu x > 0$, $\sin x < 0$, $\epsilon\phi x < 0$ και $\sigma\phi x < 0$.

Έχουμε: $\sigma\phi x = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \epsilon\phi x = \frac{1}{\sigma\phi x} = -3$. Ακόμη έχουμε:

$\sin^2 x = \frac{1}{1 + \epsilon\phi^2 x} = \frac{1}{1 + 9} = \frac{1}{10}$ και $\eta\mu^2 x = \frac{\epsilon\phi^2 x}{1 + \epsilon\phi^2 x} = \frac{9}{10}$. Επειδή όμως

ισχύει $\eta\mu x > 0$ και $\sin x < 0$, θα έχουμε τελικά ότι $\eta\mu x = \sqrt{\frac{9}{10}}$ και

$\sin x = -\sqrt{\frac{1}{10}}$.



Παράδειγμα 3: Να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχουν τιμές του x για τις οποίες να ισχύει συγχρόνως ότι $\eta\mu x = 0$ και $\sin x = 0$.

Λύση:

Από την **(Π.Τ.Τ.)** έχουμε ότι $\eta\mu^2 x + \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow 0^2 + 0^2 = 1 \Leftrightarrow 0 = 1$, αδύνατο. Δηλαδή δεν είναι δυνατό το ημίτονο και το συνημίτονο της ίδιας γωνίας να είναι συγχρόνως ίσα με το μηδέν.

Παράδειγμα 4: Να αποδειχθούν οι παρακάτω τριγωνομετρικές ταυτότητες:

A) $\eta\mu^4 \omega + \sin^4 \omega = 1 - 2\eta\mu^2 \omega \sin^2 \omega$.

B) $\eta\mu^4\omega - \sigma\upsilon\nu^4\omega = 2\eta\mu^2\omega - 1$.

Λύση:

A)

$$\eta\mu^4\omega + \sigma\upsilon\nu^4\omega = 1 - 2\eta\mu^2\omega\sigma\upsilon\nu^2\omega \Leftrightarrow (\eta\mu^2\omega)^2 + 2\eta\mu^2\omega\sigma\upsilon\nu^2\omega + (\sigma\upsilon\nu^2\omega)^2 = 1 \Leftrightarrow (\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega)^2 = 1 \Leftrightarrow 1^2 = 1, \text{ που ισχύει.}$$

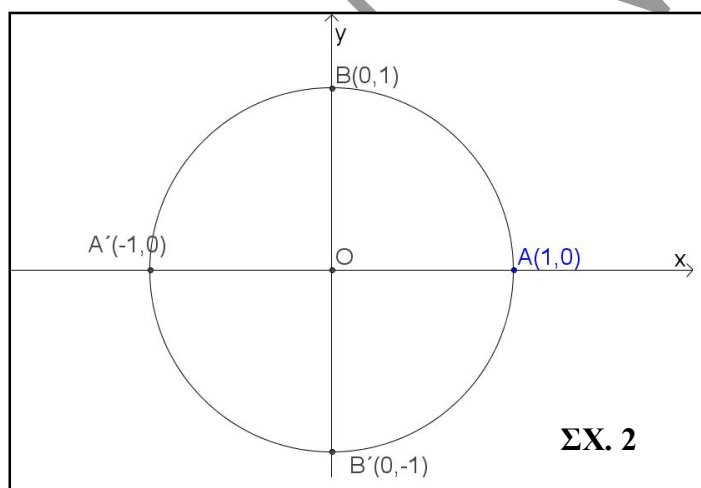
B)

$$\eta\mu^4\omega - \sigma\upsilon\nu^4\omega = (\eta\mu^2\omega)^2 - (\sigma\upsilon\nu^2\omega)^2 = (\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega) \cdot (\eta\mu^2\omega - \sigma\upsilon\nu^2\omega) = \eta\mu^2\omega - \sigma\upsilon\nu^2\omega = \eta\mu^2\omega - (1 - \eta\mu^2\omega) = 2\eta\mu^2\omega - 1. \text{ Από την (Π.Τ.Τ.) συνάγεται η ισότητα } \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 - \eta\mu^2\omega \text{ που χρησιμοποιήσαμε μόλις παραπάνω.}$$

Παράδειγμα 5: Δίνονται οι παραστάσεις $A = \frac{1 + \eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$ και $B = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{1 - \eta\mu\omega}$.

- Για ποιες τιμές του αριθμού ω ορίζεται η κάθε παράσταση;
- Για τις τιμές του ω που ορίζονται συγχρόνως και οι δύο παραστάσεις, να αποδείξετε ότι $A=B$.

Λύση: i) Η παράσταση A ορίζεται όταν $\sigma\upsilon\nu\omega \neq 0$. Όμως κάθε γωνία της οποίας το συνημίτονο είναι ίσο με το μηδέν, θα έχει τελική πλευρά την OB ή την OB' (βλ. σχήμα 2).



Μια γνωστή γωνία που έχει τελική πλευρά την OB είναι η $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ rad.

Επομένως κάθε γωνία που έχει τελική πλευρά την OB ή την OB' θα έχει μέτρο της μορφής $(k\pi + \frac{\pi}{2})$ rad με $k \in \mathbf{Z}$ (βλ. ενότητα 1-παράδειγμα

6). Άρα $\sigma\upsilon\nu\omega \neq 0 \Leftrightarrow \omega \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ για κάθε $k \in \mathbf{Z}$.

Η παράσταση B ορίζεται όταν $1 - \eta\mu\omega \neq 0 \Leftrightarrow \eta\mu\omega \neq 1$. Όμως κάθε γωνία της οποίας το ημίτονο είναι ίσο με τη μονάδα, θα έχει τελική πλευρά την OB (βλ. σχήμα 2). Μια γνωστή γωνία που έχει τελική πλευρά την OB είναι η $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ rad. Προφανώς, κάθε γωνία που έχει τελική πλευρά την

OB, θα έχει μέτρο της μορφής $(\kappa \cdot 2\pi + \frac{\pi}{2})$ rad, με $\kappa \in \mathbf{Z}$. Άρα

$$\eta\mu\omega \neq 1 \Leftrightarrow \omega \neq \kappa \cdot 2\pi + \frac{\pi}{2} \text{ για κάθε } \kappa \in \mathbf{Z}.$$

ii) Οι παραστάσεις A και B ορίζονται συγχρόνως όταν η γωνία ω δεν έχει τελική πλευρά ούτε την OB, ούτε την OB'. Δηλαδή ορίζονται όταν

$\omega \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ για κάθε $\kappa \in \mathbf{Z}$. Τότε έχουμε:

$$A = B \Leftrightarrow \frac{1 + \eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{1 - \eta\mu\omega} \Leftrightarrow (1 + \eta\mu\omega) \cdot (1 - \eta\mu\omega) = \sigma\upsilon\nu^2\omega \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - \eta\mu^2\omega = \sigma\upsilon\nu^2\omega \Leftrightarrow \eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1, \text{ που ισχύει.}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Αν $\eta\mu x = -\frac{3}{5}$ και $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, τότε να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x rad.

2) Αν $\sigma\phi x = \frac{2\sqrt{2}}{5}$ και $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, τότε να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x rad.

3) Να αποδείξετε ότι δεν μπορεί να ισχύει συγχρόνως:

i) $\eta\mu x = \frac{1}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{3}$.

ii) $\eta\mu x = 1$ και $\sigma\upsilon\nu x = 1$.

4) Να αποδείξετε τις παρακάτω τριγωνομετρικές ταυτότητες:

i) $(\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha + 1)(\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha - 1) = 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha$

ii) $\eta\mu^6\alpha + \sigma\upsilon\nu^6\alpha = 1 - 3\eta\mu^2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\alpha$

iii) $\eta\mu^2\alpha \cdot (1 + \sigma\phi^2\alpha) + \sigma\upsilon\nu^2\alpha \cdot (1 + \epsilon\phi^2\alpha) = 2$

$$\begin{aligned}
\text{iv)} \quad & \left(\varepsilon\varphi\alpha + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\alpha}\right)^2 = \frac{1 + \eta\mu\alpha}{1 - \eta\mu\alpha} \\
\text{v)} \quad & \frac{\varepsilon\varphi\alpha + \eta\mu\alpha}{\varepsilon\varphi\alpha - \eta\mu\alpha} = \frac{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\alpha} + 1}{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\alpha} - 1} \\
\text{vi)} \quad & \frac{1 - \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\alpha} + \varepsilon\varphi\alpha}{1 + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\alpha} - \varepsilon\varphi\alpha} = \frac{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\alpha} + \varepsilon\varphi\alpha - 1}{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\alpha} + \varepsilon\varphi\alpha + 1} \\
\text{vii)} \quad & 1 - \varepsilon\varphi^2\alpha + \varepsilon\varphi^4\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\alpha(1 + \varepsilon\varphi^6\alpha) \\
\text{viii)} \quad & 5\eta\mu^2\alpha + 4\sigma\upsilon\nu^2\alpha = \frac{5 + 4\sigma\varphi^2\alpha}{(1 + \varepsilon\varphi^2\alpha)\sigma\varphi^2\alpha} \\
\text{ix)} \quad & \frac{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\alpha} - \sigma\upsilon\nu\alpha}{\frac{1}{\eta\mu\alpha} - \eta\mu\alpha} = \varepsilon\varphi^3\alpha \\
\text{x)} \quad & \frac{\eta\mu\alpha - \sigma\upsilon\nu\alpha + 1}{\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha - 1} = \frac{\eta\mu\alpha + 1}{\sigma\upsilon\nu\alpha} \\
\text{xi)} \quad & \left(\frac{1}{\eta\mu\alpha} - \eta\mu\alpha\right)\left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\alpha} - \sigma\upsilon\nu\alpha\right)(\varepsilon\varphi\alpha + \sigma\varphi\alpha) = 1 \\
\text{xii)} \quad & \frac{\varepsilon\varphi^3\alpha}{1 + \varepsilon\varphi^2\alpha} + \frac{\sigma\varphi^3\alpha}{1 + \sigma\varphi^2\alpha} = \frac{1 - 2\eta\mu^2\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha}
\end{aligned}$$

Μπορείτε να βρείτε για ποιες τιμές του αριθμού α ορίζονται οι παραπάνω παραστάσεις;

5) Αν $0 < \alpha < \pi$, τότε να αποδείξετε ότι $\sqrt{\frac{1 + \sigma\upsilon\nu\alpha}{1 - \sigma\upsilon\nu\alpha}} + \sqrt{\frac{1 - \sigma\upsilon\nu\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu\alpha}} = \frac{2}{\eta\mu\alpha}$.

6) Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω παραστάσεις έχουν σταθερή τιμή (ανεξάρτητη του αριθμού α):

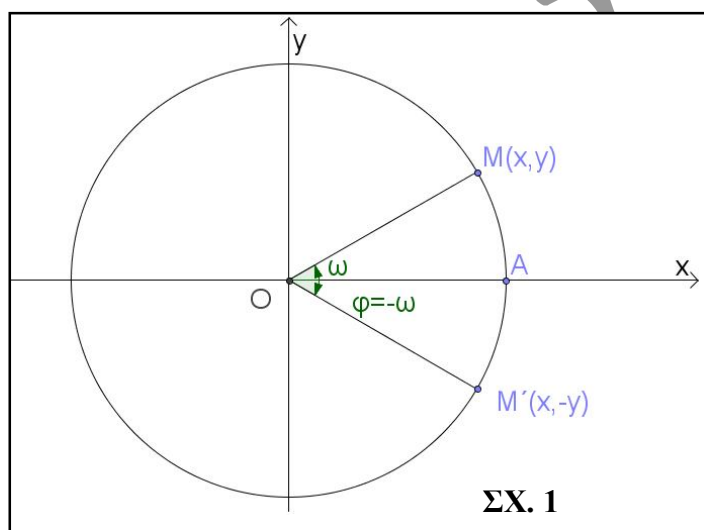
$$\begin{aligned}
\text{i)} \quad & A = 2(\eta\mu^6\alpha + \sigma\upsilon\nu^6\alpha) - 3(\eta\mu^4\alpha + \sigma\upsilon\nu^4\alpha) \\
\text{ii)} \quad & B = \eta\mu^6\alpha - \sigma\upsilon\nu^6\alpha - 2\eta\mu^4\alpha - \sigma\upsilon\nu^4\alpha + \eta\mu^2\alpha
\end{aligned}$$

ΕΝΟΤΗΤΑ 3^η: ΑΝΑΓΩΓΗ ΣΤΟ 1^ο ΤΕΤΑΡΤΗΜΟΡΙΟ

Σε αυτή την ενότητα θα δούμε τεχνικές με τις οποίες η εύρεση των τριγωνομετρικών αριθμών κάθε γωνίας ανάγεται στην εύρεση τριγωνομετρικών αριθμών μιας άλλης γωνίας της οποίας η τελική πλευρά βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο.

(1) Αντίθετες γωνίες

Αποδεικνύεται ότι οι αντίθετες γωνίες έχουν συμμετρικές τελικές πλευρές ως προς τον άξονα των συνημιτόνων (βλ. σχήμα 1). Αυτό έχει ως συνέπεια δύο αντίθετες γωνίες να έχουν ίσα συνημίτονα και αντίθετους όλους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς:



- $\eta\mu(-\omega) = -y = -\eta\mu\omega$
- $\sigma\upsilon\nu(-\omega) = x = \sigma\upsilon\nu\omega$
- $\epsilon\varphi(-\omega) = \frac{-y}{x} = -\frac{y}{x} = -\epsilon\varphi\omega$
- $\sigma\varphi(-\omega) = \frac{x}{-y} = -\frac{x}{y} = -\sigma\varphi\omega$



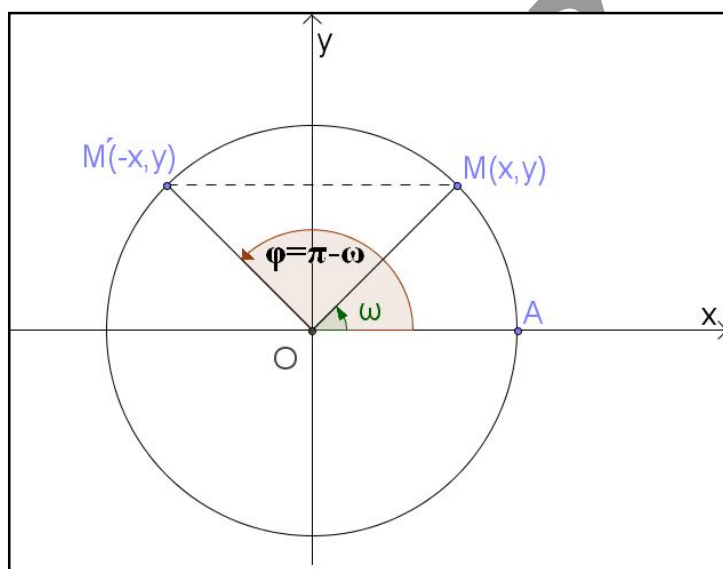
Εφαρμογή 1: Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\varphi = -30^\circ$.

Λύση: Σύμφωνα με τους παραπάνω τύπους ισχύει:

$$\eta\mu(-30^\circ)=-\eta\mu 30^\circ=-\frac{1}{2}, \quad \sigma\upsilon\nu(-30^\circ)=\sigma\upsilon\nu 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \epsilon\varphi(-30^\circ)=-\epsilon\varphi 30^\circ= -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ και } \sigma\varphi(-30^\circ)=-\sigma\varphi 30^\circ=-\sqrt{3}.$$

(2) Γωνίες με άθροισμα π rad (180 μοίρες)

Αποδεικνύεται ότι δύο γωνίες με άθροισμα π rad έχουν τελικές πλευρές που είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα των ημιτόνων. Αυτό έχει ως συνέπεια δύο τέτοιες γωνίες να έχουν ίσα ημίτονα και αντίθετους όλους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς. Αν φ και ω δύο γωνίες με $\varphi+\omega=\pi$, τότε $\varphi=\pi-\omega$:



ΣΧ. 2

- $\eta\mu(\pi-\omega)=\eta\mu\varphi=y=\eta\mu\omega$
- $\sigma\upsilon\nu(\pi-\omega)=\sigma\upsilon\nu\varphi=-x=-\sigma\upsilon\nu\omega$
- $\epsilon\varphi(\pi-\omega)=\epsilon\varphi\varphi=\frac{y}{-x}=-\frac{y}{x}=-\epsilon\varphi\omega$
- $\sigma\varphi(\pi-\omega)=\sigma\varphi\varphi=\frac{-x}{y}=-\frac{x}{y}=-\sigma\varphi\omega$



Όταν τα μέτρα των γωνιών εκφράζονται σε μοίρες, τότε η έκφραση « $\pi-\omega$ » αντικαθίσταται από την έκφραση « $180^\circ-\omega$ ». Π.χ. $\sigma\upsilon\nu(180^\circ-\omega)=-\sigma\upsilon\nu\omega$.

Εφαρμογή 2: Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ rad.

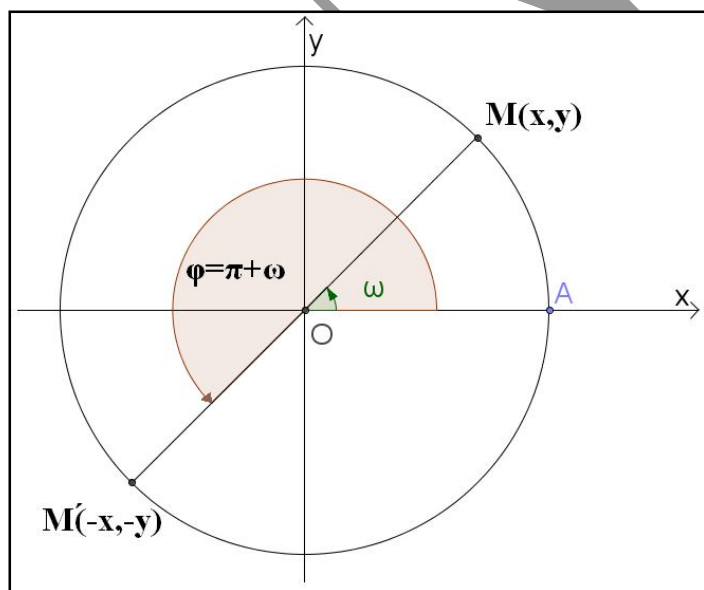
Λύση: Επειδή $\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$, έχουμε:

$$\eta\mu\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \eta\mu\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \eta\mu\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2},$$

$$\epsilon\varphi\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \epsilon\varphi\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\epsilon\varphi\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3} \quad \text{και} \quad \sigma\varphi\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sigma\varphi\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\sigma\varphi\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}. \quad \text{Καλό είναι να έχουμε υπόψη ότι } \frac{(\alpha-1)\pi}{\alpha} = \pi - \frac{\pi}{\alpha}.$$

(3) Γωνίες με διαφορά π rad (180 μοίρες)

Αποδεικνύεται ότι δύο γωνίες των οποίων οι τελικές πλευρές βρίσκονται στον ίδιο φορέα, χωρίς να ταυτίζονται, έχουν διαφορά π rad και είναι συμμετρικές ως προς τον αρχή των αξόνων. Αυτό έχει ως συνέπεια δύο τέτοιες γωνίες να έχουν ίσες εφαπτομένες και συνεφαπτομένες, ενώ έχουν αντίθετους τους υπόλοιπους τριγωνομετρικούς αριθμούς. Αν φ και ω δύο γωνίες με $\varphi - \omega = \pi$, τότε $\varphi = \pi + \omega$:



ΣΧ. 3



- $\eta\mu(\pi+\omega)=\eta\mu\varphi=-y=-\eta\mu\omega$
- $\sigma\upsilon\nu(\pi+\omega)=\sigma\upsilon\nu\varphi=-x=-\sigma\upsilon\nu\omega$
- $\epsilon\varphi(\pi+\omega)=\epsilon\varphi\varphi=\frac{-y}{-x}=\frac{y}{x}=\epsilon\varphi\omega$
- $\sigma\varphi(\pi+\omega)=\sigma\varphi\varphi=\frac{-x}{-y}=\frac{x}{y}=\sigma\varphi\omega$

Όταν τα μέτρα των γωνιών εκφράζονται σε μοίρες, τότε η έκφραση « $\pi+\omega$ » αντικαθίσταται από την έκφραση « $180^\circ+\omega$ ». Π.χ. $\eta\mu(180^\circ+\omega)=-\eta\mu\omega$.

Εφαρμογή 3: Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\varphi=\frac{4\pi}{3}$ rad.

Λύση: Επειδή $\frac{4\pi}{3}=\pi+\frac{\pi}{3}$, έχουμε:

$$\eta\mu\left(\frac{4\pi}{3}\right)=\eta\mu\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\eta\mu\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sigma\upsilon\nu\left(\frac{4\pi}{3}\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2},$$

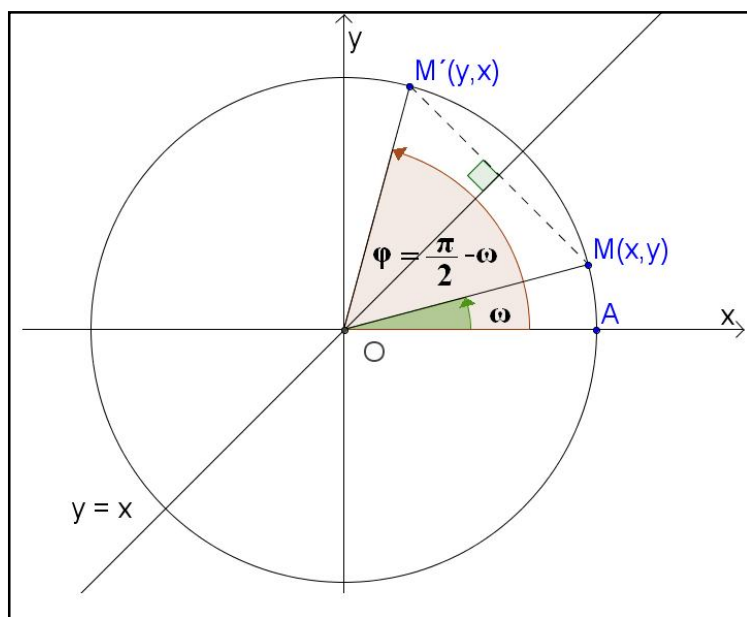
$$\epsilon\varphi\left(\frac{4\pi}{3}\right)=\epsilon\varphi\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\epsilon\varphi\frac{\pi}{3}=\sqrt{3} \quad \text{και} \quad \sigma\varphi\left(\frac{4\pi}{3}\right)=\sigma\varphi\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\sigma\varphi\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Καλό είναι να έχουμε υπόψη ότι $\frac{(\alpha+1)\pi}{\alpha}=\pi+\frac{\pi}{\alpha}$.

(4) Γωνίες με άθροισμα $\pi/2$ rad (90 μοίρες)

Αποδεικνύεται ότι δύο γωνίες με άθροισμα $\pi/2$ rad έχουν τελικές πλευρές οι οποίες είναι συμμετρικές ως προς τη διχοτόμο του $1^{\text{ου}}$ και $3^{\text{ου}}$ τεταρτημορίου, δηλαδή ως προς την ευθεία με εξίσωση $y=x$. Επιπλέον, πρέπει να έχουμε υπόψη μας ότι όταν δυο σημεία M και M' είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία $y=x$, τότε η τετμημένη του ενός είναι ίση με την τεταγμένη του άλλου και αντίστροφα. Δηλαδή αν το σημείο M έχει συντεταγμένες (x,y) , τότε το M' θα έχει συντεταγμένες (y,x) . Αυτό έχει ως συνέπεια για δύο γωνίες με άθροισμα $\pi/2$ rad, το ημίτονο της μιας να ισούται με το συνημίτονο της άλλης, η εφαπτομένη της μιας να είναι ίση με τη συνεφαπτομένη της άλλης και αντίστροφα.

Αν φ και ω δύο γωνίες με $\varphi+\omega=\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \varphi=\frac{\pi}{2}-\omega$:



ΣΧ. 4

- $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) = \eta\mu\varphi = x = \sigma\upsilon\nu\omega$
- $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) = \sigma\upsilon\nu\varphi = y = \eta\mu\omega$
- $\epsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) = \epsilon\varphi\varphi = \frac{x}{y} = \sigma\varphi\omega$
- $\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) = \sigma\varphi\varphi = \frac{y}{x} = \epsilon\varphi\omega$



Όταν τα μέτρα των γωνιών εκφράζονται σε μοίρες, τότε η έκφραση « $\frac{\pi}{2} - \omega$ » αντικαθίσταται από την έκφραση « $90^\circ - \omega$ ». Π.χ. $\epsilon\varphi(90^\circ - \omega) = \sigma\varphi\omega$.

Εφαρμογή 4: Να συγκρίνετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας των 70° με τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας των 20° .

Λύση: Επειδή $70^\circ + 20^\circ = 90^\circ$, έχουμε:

$$\eta\mu 70^\circ = \eta\mu(90^\circ - 20^\circ) = \sigma\upsilon\nu 20^\circ, \quad \sigma\upsilon\nu 70^\circ = \sigma\upsilon\nu(90^\circ - 20^\circ) = \eta\mu 20^\circ, \quad \epsilon\varphi 70^\circ = \epsilon\varphi(90^\circ - 20^\circ) = \sigma\varphi 20^\circ \text{ και } \sigma\varphi 70^\circ = \sigma\varphi(90^\circ - 20^\circ) = \epsilon\varphi 20^\circ.$$



(5) Απομνημόνευση των παραπάνω τύπων με τη βοήθεια του κανόνα «ΟΗΕΣ»

Τα προηγούμενα σχήματα εξηγούν ενδεικτικά, όμως αποσπασματικά για ποιο λόγο ισχύουν οι παραπάνω τύποι. Υπάρχει όμως και ένας γενικός απομνημονευτικός κανόνας που στηρίζεται στον κανόνα «ΟΗΕΣ». Το σκεπτικό είναι το εξής: Αφού οι παραπάνω τύποι ισχύουν για κάθε τιμή της γωνίας ω , εφόσον έχουν νόημα οι τύποι για αυτές τις τιμές, τότε οι ίδιοι ακριβώς τύποι ισχύουν και για μικρές θετικές γωνίες ω , δηλαδή για $0^\circ < \omega < 90^\circ$. Θα δούμε λοιπόν το «κόλπο» με το οποίο βρίσκουμε τους παραπάνω τύπους σκεπτόμενοι σαν να είναι η γωνία ω μια μικρή θετική γωνία, δηλαδή σαν να βρίσκεται η τελική πλευρά της ω στο 1° τεταρτημόριο.

Πρώτα από όλα θα δούμε ενιαία τις τρεις πρώτες περιπτώσεις, ενώ θα γενικεύσουμε την τέταρτη περίπτωση.

Καταρχάς οι τρεις πρώτες ομάδες τύπων ακολουθούν το παρακάτω σχήμα:

- $\eta\mu(\quad) = \pm(\quad) \eta\mu\omega$
- $\sigma\upsilon\nu(\quad) = \pm(\quad) \sigma\upsilon\nu\omega$
- $\epsilon\phi(\quad) = \pm(\quad) \epsilon\phi\omega$
- $\sigma\phi(\quad) = \pm(\quad) \sigma\phi\omega$

όπου το «+» ή το «-» εξαρτάται κατά περίπτωση.

Αν θεωρήσουμε ότι για τη γωνία ω ισχύει $0^\circ < \omega < 90^\circ$ (1° τεταρτημόριο), τότε η τελική πλευρά της γωνίας :

(α) $-\omega$ θα βρίσκεται στο 4° τεταρτημόριο (σχ. 1) και άρα από τον κανόνα «ΟΗΕΣ» μόνο το συνημίτονο είναι θετικό. Άρα $\sigma\upsilon\nu(-\omega) = +\sigma\upsilon\nu\omega$, ενώ για τους υπόλοιπους τριγωνομετρικούς αριθμούς θα βάζουμε «-», π.χ. $\eta\mu(-\omega) = -\eta\mu\omega$.

(β) $\pi - \omega$ θα βρίσκεται στο 2° τεταρτημόριο (σχ. 2) και άρα από τον κανόνα «ΟΗΕΣ» μόνο το ημίτονο είναι θετικό. Άρα $\eta\mu(\pi - \omega) = +\eta\mu\omega$, ενώ για τους υπόλοιπους τριγωνομετρικούς αριθμούς θα βάζουμε «-», π.χ. $\epsilon\phi(\pi - \omega) = -\epsilon\phi\omega$.

(γ) $\pi + \omega$ θα βρίσκεται στο 3° τεταρτημόριο (σχ. 3) και άρα από τον κανόνα «ΟΗΕΣ» μόνο η εφαπτομένη και η συνεφαπτομένη είναι θετικές.

Άρα $\varepsilon\phi(\pi+\omega)=+\varepsilon\phi\omega$, $\sigma\phi(\pi+\omega)=+\sigma\phi\omega$, ενώ για τους υπόλοιπους τριγωνομετρικούς αριθμούς θα βάζουμε «-», π.χ. $\eta\mu(\pi+\omega)=-\eta\mu\omega$.

Τώρα θα δούμε τον τρόπο για να βρίσκουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνιών της μορφής $\kappa \cdot \frac{\pi}{2} \pm \omega$, όπου κ περιττός αριθμός, δηλαδή $\kappa = \pm 1, \pm 3, \pm 5$ κ.τ.λ.

Στην περίπτωση των γωνιών $\frac{\pi}{2} - \omega$ το ημίτονο γινόταν συνημίτονο, η εφαπτομένη γινόταν συνεφαπτομένη κ.τ.λ. Το ίδιο ισχύει γενικότερα για τις γωνίες της μορφής $\kappa \cdot \frac{\pi}{2} \pm \omega$, όπου κ περιττός αριθμός με τη διαφορά ότι στο 2^ο μέλος της ισότητας βάζουμε «+» ή «-» κατά περίπτωση:

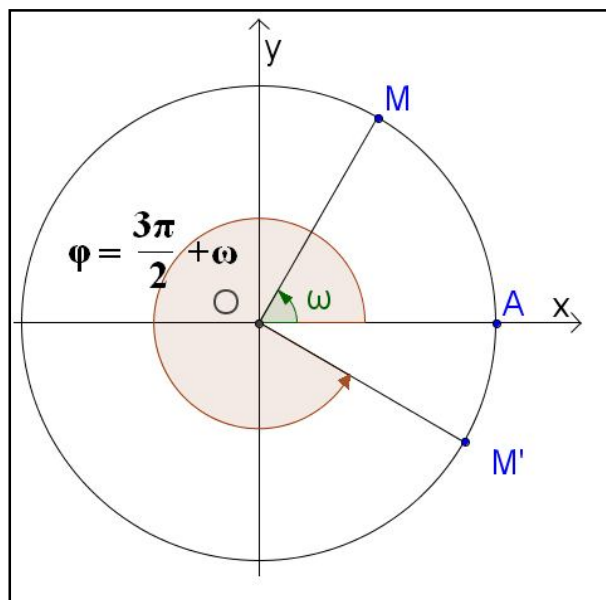
- $\eta\mu(\kappa \frac{\pi}{2} \pm \omega) = \pm(\pm) \sigma\eta\mu\omega$
- $\sigma\eta\mu(\kappa \frac{\pi}{2} \pm \omega) = \pm(\pm) \eta\mu\omega$
- $\varepsilon\phi(\kappa \frac{\pi}{2} \pm \omega) = \pm(\pm) \sigma\phi\omega$
- $\sigma\phi(\kappa \frac{\pi}{2} \pm \omega) = \pm(\pm) \varepsilon\phi\omega$

Για να διαπιστώσουμε αν πρέπει να βάλουμε «+» ή «-» θα πρέπει να δούμε σε ποιο τεταρτημόριο βρίσκεται η τελική πλευρά της γωνίας $\kappa \frac{\pi}{2} \pm \omega$, θεωρώντας προσωρινά ότι $0 \text{ rad} < \omega < \frac{\pi}{2} \text{ rad}$. Η παρακάτω εφαρμογή εξηγεί τον τρόπο με τον οποίο δουλεύουμε για να εξάγουμε τους τύπους κατά περίπτωση:

Εφαρμογή 5: Να συγκρίνετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας της μορφής $\frac{3\pi}{2} + \omega$ με τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω .

Λύση: Οι τύποι που θα βρούμε ισχύουν όπως είπαμε για κάθε τιμή της γωνίας ω , αρκεί να έχουν νόημα οι παραστάσεις. Χάριν ευκολίας λοιπόν

θα θεωρήσουμε ότι $0 \text{ rad} < \omega < \frac{\pi}{2} \text{ rad}$. Σε αυτή την περίπτωση, η τελική πλευρά της γωνίας $\frac{3\pi}{2} + \omega$ θα βρίσκεται στο 4^ο τεταρτημόριο:



Επομένως στο συνημίτονο αυτής της γωνίας, στο 2^ο μέλος της ισότητας θα προσάψουμε θετικό πρόσημο (κανόνας «ΟΗΕΣ»), δηλαδή:

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \omega\right) = +\sin\omega$$

Στους υπόλοιπους τριγωνομετρικούς αριθμούς θα προσάψουμε το πρόσημο «-»:

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \omega\right) = -\cos\omega, \quad \tan\left(\frac{3\pi}{2} + \omega\right) = -\cot\omega \quad \text{και} \quad \cot\left(\frac{3\pi}{2} + \omega\right) = -\tan\omega.$$

Να τονίσουμε για άλλη μια φορά ότι αυτοί οι τύποι ισχύουν για κάθε τιμή της γωνίας ω και όχι μόνο για $0 \text{ rad} < \omega < \frac{\pi}{2} \text{ rad}$, δεδομένου ότι έχουν νόημα οι τύποι.

(6) Παραδείγματα.

Παράδειγμα 1: Να υπολογιστούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών: α) -2370° και β) $\frac{74\pi}{3} \text{ rad}$.

Λύση: α) Εκτελώντας την ευκλείδεια διαίρεση του 2370 με το 360 προκύπτει ότι $2370 = 6 \cdot 360 + 210$. Άρα $-2370^\circ = -6 \cdot 360^\circ - 210^\circ$. Σύμφωνα με τους τύπους Α της ενότητας 1, οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των -2370° θα ταυτίζονται με τη γωνία των -210° .

Άρα:

- $\eta\mu(-2370^\circ) = \eta\mu(-210^\circ) = -\eta\mu 210^\circ = -\eta\mu(180^\circ + 30^\circ) = -(-\eta\mu 30^\circ) = \eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2}$.
- $\sigma\upsilon\nu(-2370^\circ) = \sigma\upsilon\nu(-210^\circ) = \sigma\upsilon\nu 210^\circ = \sigma\upsilon\nu(180^\circ + 30^\circ) = -\sigma\upsilon\nu 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- $\epsilon\varphi(-2370^\circ) = \epsilon\varphi(-210^\circ) = -\epsilon\varphi 210^\circ = -\epsilon\varphi(180^\circ + 30^\circ) = -\epsilon\varphi 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.
- $\sigma\varphi(-2370^\circ) = \sigma\varphi(-210^\circ) = -\sigma\varphi 210^\circ = -\sigma\varphi(180^\circ + 30^\circ) = -\sigma\varphi 30^\circ = -\sqrt{3}$.

β) Θα εκφράσουμε τη γωνία $\frac{74\pi}{3}$ στη μορφή $\kappa \cdot 2\pi + \omega$, όπου κ ακέραιος:

$$\frac{74\pi}{3} = \frac{74}{6} \cdot 2\pi = \frac{(12 \cdot 6 + 2)}{6} \cdot 2\pi = (12 + \frac{1}{3}) \cdot 2\pi = 12 \cdot 2\pi + \frac{2\pi}{3} \cdot^* \quad \text{Σύμφωνα}$$

με τους τύπους Α' της ενότητας 1, οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των $\frac{74\pi}{3}$ rad είναι ίσοι με τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των $\frac{2\pi}{3}$ rad.

Άρα:

- $\eta\mu(\frac{74\pi}{3}) = \eta\mu(\frac{2\pi}{3}) = \eta\mu(\pi - \frac{\pi}{3}) = \eta\mu(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- $\sigma\upsilon\nu(\frac{74\pi}{3}) = \sigma\upsilon\nu(\frac{2\pi}{3}) = \sigma\upsilon\nu(\pi - \frac{\pi}{3}) = -\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$.
- $\epsilon\varphi(\frac{74\pi}{3}) = \epsilon\varphi(\frac{2\pi}{3}) = \epsilon\varphi(\pi - \frac{\pi}{3}) = -\epsilon\varphi(\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.
- $\sigma\varphi(\frac{74\pi}{3}) = \sigma\varphi(\frac{2\pi}{3}) = \sigma\varphi(\pi - \frac{\pi}{3}) = -\sigma\varphi(\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Παράδειγμα 2: Να υπολογιστούν με τη βοήθεια της γωνίας ω οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών: α) $90^\circ + \omega$ και β) $\frac{101\pi}{2} + \omega$ rad.

* Η ισότητα $74 = 12 \cdot 6 + 2$ προκύπτει από την ευκλείδεια διαίρεση του 74 με το 6.

Λύση:

α) Αν θεωρούσαμε προσωρινά ότι $0^\circ < \omega < 90^\circ$, τότε η γωνία $90^\circ + \omega$ θα είχε τελική πλευρά που θα βρισκόταν στο 2 τεταρτημόριο και άρα θα είχε μόνο το ημίτονό της θετικό. Επομένως για κάθε γωνία ω , θα ισχύει:

- $\eta\mu(90^\circ + \omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$
- $\sigma\upsilon\nu(90^\circ + \omega) = -\eta\mu\omega$
- $\epsilon\phi(90^\circ + \omega) = -\sigma\phi\omega$
- $\sigma\phi(90^\circ + \omega) = -\epsilon\phi\omega$

Οι παραπάνω ισότητες ισχύουν για όλες τις τιμές της γωνίας ω στις οποίες έχουν νόημα οι τύποι.

β) Θα γράψουμε τη γωνία $\frac{101\pi}{2}$ στη μορφή $\kappa \cdot 2\pi + \varphi$, όπου κ ακέραιος αριθμός. Προς τούτο έχουμε:

$$\frac{101\pi}{2} = \frac{101}{4} \cdot 2\pi = \frac{(25 \cdot 4 + 1)}{4} \cdot 2\pi = \left(25 + \frac{1}{4}\right) \cdot 2\pi = 25 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{2}. \quad \text{Άρα}$$

$\frac{101\pi}{2} + \omega = 25 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{2} + \omega$ και επομένως οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας $\frac{101\pi}{2} + \omega$ rad είναι ίσοι με τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\frac{\pi}{2} + \omega$ rad οι οποίοι βρέθηκαν ουσιαστικά στο προηγούμενο ερώτημα, αν και εδώ οι γωνίες εκφράζονται σε rad αντί σε μοίρες.

Για παράδειγμα ισχύει: $\eta\mu\left(\frac{101\pi}{2} + \omega\right) = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + \omega\right) = \sigma\upsilon\nu\omega$, $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{101\pi}{2} + \omega\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + \omega\right) = -\eta\mu\omega$ κ.τ.λ.

Παράδειγμα 3: Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης $A = \epsilon\phi 1^\circ \cdot \epsilon\phi 2^\circ \cdot \dots \cdot \epsilon\phi 89^\circ$.

Λύση: Επειδή $\epsilon\phi 89^\circ = \epsilon\phi(90^\circ - 1^\circ) = \sigma\phi 1^\circ$, $\epsilon\phi 88^\circ = \epsilon\phi(90^\circ - 2^\circ) = \sigma\phi 2^\circ$ κ.τ.λ., η παράσταση A γράφεται ως εξής:

$$\begin{aligned} A &= \epsilon\phi 1^\circ \cdot \epsilon\phi 2^\circ \cdot \dots \cdot \epsilon\phi 89^\circ = \epsilon\phi 1^\circ \cdot \epsilon\phi 2^\circ \cdot \dots \cdot \epsilon\phi 44^\circ \cdot \epsilon\phi 45^\circ \cdot \sigma\phi 44^\circ \cdot \sigma\phi 43^\circ \cdot \dots \cdot \sigma\phi 1^\circ \\ &= (\epsilon\phi 1^\circ \cdot \sigma\phi 1^\circ) \cdot (\epsilon\phi 2^\circ \cdot \sigma\phi 2^\circ) \cdot \dots \cdot (\epsilon\phi 44^\circ \cdot \sigma\phi 44^\circ) \cdot \epsilon\phi 45^\circ = \underbrace{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1}_{44 \text{ παράγοντες}} \cdot \epsilon\phi 45^\circ = \end{aligned}$$

$$\epsilon\phi 45^\circ = 1.$$

Παράδειγμα 4: Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Να αποδειχτεί ότι:

α) $\eta\mu A = \eta\mu(B+\Gamma)$ και β) $\eta\mu(\frac{A}{2}) = \sigma\upsilon\nu(\frac{B+\Gamma}{2})$.

Λύση: Οι γωνίες Α, Β και Γ είναι γωνίες τριγώνου και άρα ισχύει $A+B+\Gamma=\pi \Leftrightarrow A=\pi-(B+\Gamma)$. Επομένως:

α) $\eta\mu A = \eta\mu(\pi-(B+\Gamma)) = \eta\mu(B+\Gamma)$

β) $\eta\mu(\frac{A}{2}) = \eta\mu(\frac{\pi-(B+\Gamma)}{2}) = \eta\mu(\frac{\pi}{2} - \frac{B+\Gamma}{2}) = \sigma\upsilon\nu(\frac{B+\Gamma}{2})$.

Παράδειγμα 5: Να απλοποιηθούν οι παρακάτω παραστάσεις:

α) $A = \frac{\eta\mu(3\pi + \alpha) \cdot \sigma\upsilon\nu(\frac{3\pi}{2} + \alpha) \cdot \epsilon\phi(5\pi + \alpha)}{\sigma\upsilon\nu(5\pi - \alpha) \cdot \eta\mu(\frac{3\pi}{2} - \alpha) \cdot \epsilon\phi(\pi + \alpha)}$

β) $B = \frac{\eta\mu(\pi + \alpha) \cdot \sigma\upsilon\nu(\frac{3\pi}{2} - \alpha) \cdot \epsilon\phi(\frac{3\pi}{2} + \alpha)}{\eta\mu(2\pi - \alpha)}$

Λύση:

α) Έχουμε:

- $\eta\mu(3\pi + \alpha) = \eta\mu(2\pi + \pi + \alpha) = \eta\mu(\pi + \alpha) = -\eta\mu\alpha$
- $\sigma\upsilon\nu(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = \eta\mu\alpha$ (βλ. εφαρμογή 5)
- $\epsilon\phi(5\pi + \alpha) = \epsilon\phi(4\pi + \pi + \alpha) = \epsilon\phi(\pi + \alpha) = \epsilon\phi\alpha$
- $\sigma\upsilon\nu(5\pi - \alpha) = \sigma\upsilon\nu(4\pi + \pi - \alpha) = \sigma\upsilon\nu(\pi - \alpha) = -\sigma\upsilon\nu\alpha$
- $\eta\mu(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = -\sigma\upsilon\nu\alpha$ (γιατί;)
- $\epsilon\phi(\pi + \alpha) = \epsilon\phi\alpha$

Άρα $A = \frac{-\eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\alpha \cdot \epsilon\phi\alpha}{-\sigma\upsilon\nu\alpha \cdot (-\sigma\upsilon\nu\alpha) \cdot \epsilon\phi\alpha} = \frac{-\eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha} = -\epsilon\phi^2\alpha$.

β) Έχουμε:

- $\eta\mu(\pi+\alpha)=-\eta\mu\alpha$
- $\sigma\upsilon\nu(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=-\eta\mu\alpha$
- $\epsilon\varphi(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=-\sigma\varphi\alpha$ (βλ. εφαρμογή 5)
- $\eta\mu(2\pi-\alpha)=\eta\mu(-\alpha)=-\eta\mu\alpha$

$$\text{Άρα } B = \frac{-\eta\mu\alpha \cdot (-\eta\mu\alpha) \cdot (-\sigma\varphi\alpha)}{-\eta\mu\alpha} = -\eta\mu\alpha \cdot (-\sigma\varphi\alpha) = \eta\mu\alpha \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha} = \sigma\upsilon\nu\alpha.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των παρακάτω γωνιών:

α) 120° β) -120° γ) 150° δ) -330°

2) Να βρείτε τους παρακάτω τριγωνομετρικούς αριθμούς:

α) $\eta\mu\frac{5\pi}{6}$ β) $\sigma\upsilon\nu\frac{13\pi}{6}$ γ) $\sigma\varphi\frac{22\pi}{3}$

3) Να αποδείξετε ότι:

$$\text{i)} \quad \eta\mu\frac{5\pi}{6}\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{4}\epsilon\varphi\frac{2\pi}{3} - \eta\mu\frac{2\pi}{3}\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{4}\epsilon\varphi\frac{5\pi}{6} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

$$\text{ii)} \quad \frac{\eta\mu(90^\circ - \omega) - \sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega)}{\epsilon\varphi(270^\circ + \omega) + \sigma\varphi(360^\circ - \omega)} = -\frac{2\sqrt{13}}{13}.$$

$$\text{iii)} \quad \eta\mu\frac{5\pi}{4}\sigma\upsilon\nu\frac{7\pi}{6}\epsilon\varphi\frac{4\pi}{3} = \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

$$\text{iv)} \quad \sigma\upsilon\nu\frac{4\pi}{3}\sigma\varphi\frac{7\pi}{6}\epsilon\varphi\frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{v)} \quad \frac{\eta\mu(\frac{11\pi}{2} + \alpha) \cdot \eta\mu(15\pi + \alpha) \cdot \eta\mu(\frac{5\pi}{2} - \alpha)}{\epsilon\varphi(\frac{13\pi}{2} + \alpha) \cdot \sigma\varphi(\frac{7\pi}{2} - \alpha) \cdot \sigma\upsilon\nu(\frac{17\pi}{2} + \alpha)} = \sigma\upsilon\nu^2\alpha.$$

$$\text{vi)} \quad \eta\mu(\pi-\alpha)+\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)+\eta\mu(\alpha-\pi)-\eta\mu\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=0.$$

$$\text{vii)} \quad \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\eta\mu(\pi-\alpha)-\eta\mu(-\alpha)+\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=0.$$

$$\text{viii)} \quad 6\epsilon\varphi(\pi+\alpha)+3\sigma\varphi\left(\frac{43\pi}{2}-\alpha\right)-43\epsilon\varphi(21\pi-\alpha)=52\epsilon\varphi\alpha.$$

$$\text{ix)} \quad \frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{15\pi}{2}+\alpha\right) \cdot \eta\mu\left(\frac{7\pi}{2}+\alpha\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{9\pi}{2}-\alpha\right)}{\epsilon\varphi\left(\frac{5\pi}{2}+\alpha\right) \cdot \eta\mu\left(\frac{17\pi}{2}-\alpha\right) \cdot \epsilon\varphi(3\pi+\alpha)} = \eta\mu^2\alpha.$$

4) Να υπολογίσετε την τιμή των παρακάτω παραστάσεων:

$$\text{i)} \quad \sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi}{4}\right) \cdot \eta\mu\left(\frac{7\pi}{6}\right) \cdot \epsilon\varphi\left(\frac{4\pi}{3}\right)$$

$$\text{ii)} \quad \eta\mu\left(\frac{13\pi}{3}\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi}{3}\right) + \epsilon\varphi\left(\frac{4\pi}{3}\right) \cdot \sigma\varphi\left(\frac{11\pi}{6}\right)$$

$$\text{iii)} \quad \eta\mu(-35^\circ) + \sigma\upsilon\nu(-156^\circ) + \epsilon\varphi(-250^\circ) + \sigma\varphi(-345^\circ)$$

$$\text{iv)} \quad \frac{\eta\mu(\pi-\alpha) \cdot \sigma\varphi\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) \cdot \sigma\upsilon\nu(2\pi-\alpha)}{\epsilon\varphi(\pi-\alpha) \cdot \epsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}$$

$$\text{v)} \quad \frac{\epsilon\varphi(180^\circ-\alpha) \cdot \sigma\upsilon\nu(540^\circ-\alpha) \cdot \epsilon\varphi(450^\circ-\alpha)}{\eta\mu(90^\circ+\alpha) \cdot \sigma\varphi(810^\circ-\alpha) \cdot \epsilon\varphi(\alpha-270^\circ)}$$

$$\text{vi)} \quad \frac{\sigma\upsilon\nu\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right) + \eta\mu(3\pi-\alpha) - \sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi}{2}+\alpha\right)}{4\eta\mu(7\pi-\alpha) \cdot \sigma\upsilon\nu(\alpha-4\pi)}$$

5) Να αποδείξετε ότι: α) $\eta\mu^2 390^\circ + \sigma\upsilon\nu^2 30^\circ = 1$ και β) $\eta\mu^2 275^\circ + \eta\mu^2 5^\circ = 1$

6) Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Να αποδείξετε ότι:

$$\text{α)} \quad \sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu(B+\Gamma) = 0 \quad \text{και} \quad \text{β)} \quad \sigma\upsilon\nu \frac{A}{2} = \eta\mu \frac{B+\Gamma}{2}.$$

7) Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^\circ$. Να δείξετε ότι:

$$\frac{2\epsilon\varphi B}{1-\epsilon\varphi^2 B} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 B - \eta\mu^2 B} = \frac{\gamma+\beta}{\gamma-\beta}, \text{ εφόσον } \gamma \neq \beta.$$

8) Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Να αποδείξετε ότι:

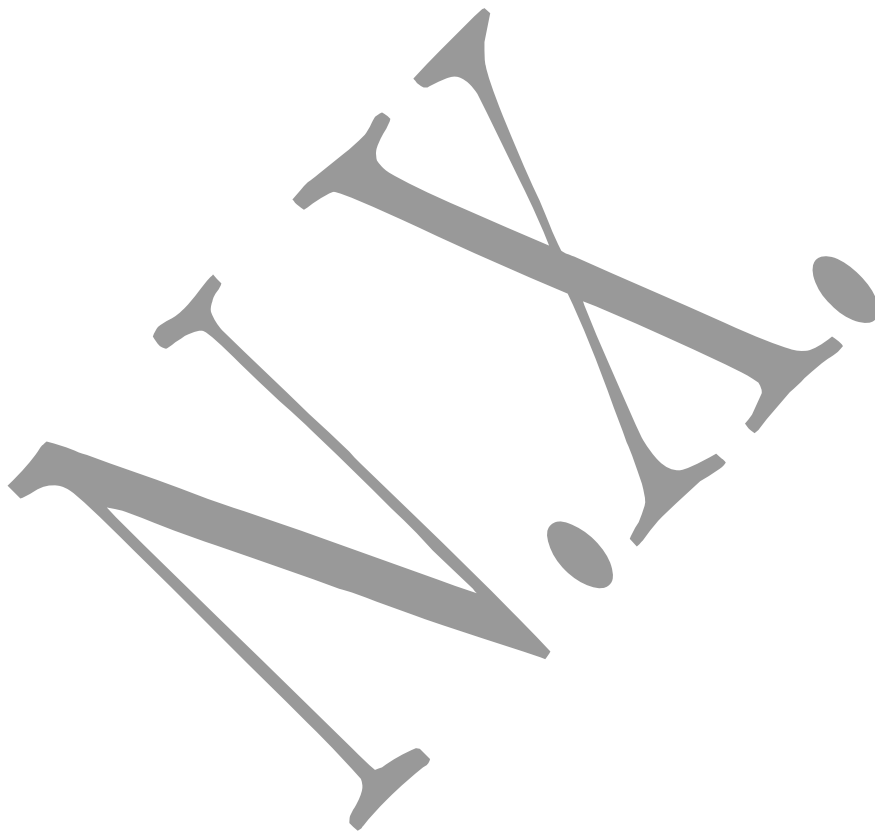
$$\alpha) \sin(A+\Gamma)=\sin(B+\Delta) \quad \text{και} \quad \beta) \eta\mu\frac{A+\Gamma}{2}=\eta\mu\frac{B+\Delta}{2}.$$

9) Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \sigma\varphi 1^{\circ} \cdot \sigma\varphi 2^{\circ} \cdot \dots \cdot \sigma\varphi 89^{\circ} = 1.$$

$$\beta) \epsilon\varphi 1^{\circ} \cdot \epsilon\varphi 2^{\circ} \cdot \dots \cdot \epsilon\varphi 45^{\circ} \cdot \epsilon\varphi 91^{\circ} \cdot \epsilon\varphi 92^{\circ} \cdot \dots \cdot \epsilon\varphi 135^{\circ} = -1.$$

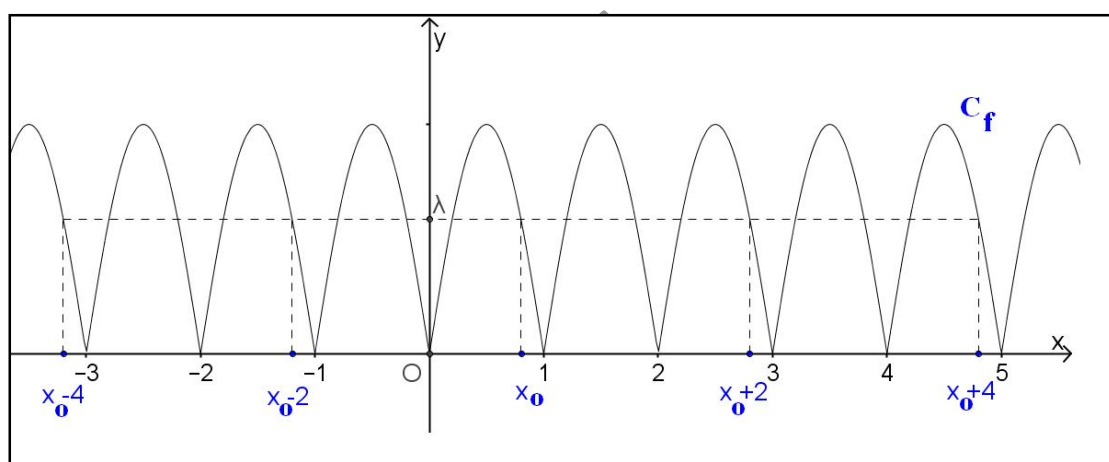
$$\gamma) \sigma\varphi 1^{\circ} \cdot \sigma\varphi 2^{\circ} \cdot \dots \cdot \sigma\varphi 45^{\circ} \cdot \epsilon\varphi 181^{\circ} \cdot \epsilon\varphi 182^{\circ} \cdot \dots \cdot \epsilon\varphi 225^{\circ} = 1.$$



ΕΝΟΤΗΤΑ 4^η: Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΕΡΙΟΔΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ.

Η παρακάτω ενότητα πέραν του ορισμού 1 έχει θεωρητικό χαρακτήρα και απευθύνεται στον απαιτητικό αναγνώστη. Ωστόσο τα θεωρήματα αυτής της ενότητας βρίσκουν άμεση εφαρμογή στις τριγωνομετρικές συναρτήσεις που θα συναντήσουμε στην επόμενη ενότητα.

Μια περιοδική συνάρτηση θα λέγαμε με απλά λόγια ότι είναι μια συνάρτηση της οποίας η γραφική επαναλαμβάνεται, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα:



ΣΧ. 1

Στο σχήμα 1 βλέπουμε ότι αν επιλέξουμε τυχαία ένα οποιοδήποτε σημείο x_0 που ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης f , τότε $f(x_0)=f(x_0+2)=f(x_0-2)$. Λέμε τότε ότι ο αριθμός 2 είναι μια περίοδος της συνάρτησης f . Δίνουμε λοιπόν τον τυπικό ορισμό μιας περιοδικής συνάρτησης:

Ορισμός 1: Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A . Αν υπάρχει πραγματικός αριθμός $T>0$, ώστε για κάθε $x \in A$ να ισχύει:

i) $x+T \in A$ και $x-T \in A$

ii) $f(x+T)=f(x-T)=f(x)$

τότε λέμε ότι η συνάρτηση f είναι περιοδική με μία περίοδο τον αριθμό T .

Ο ορισμός υπονοεί ότι ενδεχομένως μια περιοδική συνάρτηση μπορεί να έχει περισσότερες από μια περιόδους. Για παράδειγμα στο σχήμα 1 η συνάρτηση f έχει περίοδο τον αριθμό $T_1=2$. Όμως, παρατηρούμε ότι και ο αριθμός $T_2=4$ είναι μία περίοδος της συνάρτησης f , διότι για κάθε x_0 που ανήκει στο πεδίο ορισμού της ισχύει $f(x_0)=f(x_0+4)=f(x_0-4)$. Παρατηρούμε ότι ο αριθμός 4 είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του αριθμού 2. Γενικά ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ 1: Έστω περιοδική συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το σύνολο A και T μια περίοδος της. Τότε κάθε αριθμός της μορφής $n \cdot T$, όπου n θετικός φυσικός αριθμός είναι επίσης μια περίοδος της συνάρτησης f .

Απόδειξη: Θα δείξουμε ότι για το θετικό αριθμό $n \cdot T$ ικανοποιούνται οι συνθήκες (i) και (ii) του ορισμού 1.

Έστω $x \in A$. Επειδή ο αριθμός T είναι μια περίοδος της συνάρτησης, έπεται ότι και $x+T \in A$ (ιδιότητα (i) του ορισμού 1). Όμοια τώρα, επειδή $x+T \in A$, έπεται ότι και ο αριθμός $(x+T)+T=x+2T \in A$. Επαγωγικά φτάνουμε στο συμπέρασμα ότι $x+n \cdot T \in A$:

$$x \in A \Rightarrow x+T \in A \Rightarrow (x+T)+T=x+2T \in A \Rightarrow (x+2T)+T=x+3T \in A \Rightarrow \dots \Rightarrow [x+(n-1)T]+T=x+n \cdot T \in A.$$

Όμοια αποδεικνύεται ότι και $x-n \cdot T \in A$.

Άρα για το θετικό αριθμό $n \cdot T$ ικανοποιείται η συνθήκη (i) του ορισμού 1.

Επίσης βλέπουμε ότι:

$$f(x)=f(x+T)=f((x+T)+T)=f((x+2T)+T)=f(x+3T)=\dots=f(x+(n-1) \cdot T)=f((x+(n-1) \cdot T)+T)=f(x+n \cdot T).$$

Όμοια αποδεικνύεται ότι $f(x)=f(x-n \cdot T)$. Επομένως ικανοποιείται η συνθήκη (ii) του ορισμού 1. Η απόδειξη τώρα είναι πλήρης.//

Έτσι, στο παράδειγμα του σχήματος 1 η f έχει περιόδους τους αριθμούς 2, $2 \cdot 2=4$, $2 \cdot 3=6$, $2 \cdot 4=8$ κ.τ.λ. Παρατηρούμε ότι ο αριθμός 2 είναι η μικρότερη περίοδος της συνάρτησης f . Οδηγούμαστε στον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός 2: Αν για μια περιοδική συνάρτηση f υπάρχει ελάχιστος θετικός αριθμός T που ικανοποιεί τις συνθήκες (i) και (ii) του ορισμού 1, τότε ο αριθμός T λέγεται **ελάχιστη** ή **πρωτεύουσα** ή **αρχική** περίοδος της συνάρτησης f .

Πρέπει να τονίσουμε όμως ότι κάθε περιοδική συνάρτηση δεν έχει κατ' ανάγκη αρχική περίοδο. Για παράδειγμα η σταθερή συνάρτηση $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ με τύπο $f(x)=5$ είναι περιοδική, διότι για κάθε $x \in \mathbf{R}$ και για κάθε $M>0$, ισχύει $f(x \pm M)=f(x)=5$. Ωστόσο δεν υπάρχει ελάχιστος θετικός αριθμός M με την προηγούμενη ιδιότητα.

Έστω τώρα μια περιοδική συνάρτηση f με ελάχιστη περίοδο έναν αριθμό $T>0$. Τότε σύμφωνα με το θεώρημα 1, κάθε αριθμός της μορφής $n \cdot T$ όπου n θετικός ακέραιος είναι επίσης μια περίοδος της συνάρτησης f . Το ερώτημα που γεννάται είναι αν η συνάρτηση f μπορεί να έχει και άλλες περιόδους που δεν είναι πολλαπλάσια της ελάχιστης περιόδου. Η απάντηση είναι αρνητική:

ΘΕΩΡΗΜΑ 2: Έστω περιοδική συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το σύνολο A και T η ελάχιστη περίοδος της. Τότε κάθε άλλη περίοδος της συνάρτησης f είναι αναγκαστικά θετικό ακέραιο πολλαπλάσιο του αριθμού T .

Απόδειξη: Έστω $T'>0$ μια περίοδος της f με $T' \neq T$. Επειδή ο αριθμός T είναι η ελάχιστη περίοδος της f , θα ισχύει $T < T'$. Έστω n_0 ο μέγιστος φυσικός αριθμός ο οποίος είναι λύση της ανίσωσης $n \cdot T \leq T'$, $n \in \mathbf{N}$. Τότε $n_0 \cdot T \leq T' < (n_0+1) \cdot T$ (1). Επίσης ισχύει ότι $T' - n_0 \cdot T \geq 0$. Θέτω $u = T' - n_0 \cdot T$. Προφανώς $u \geq 0$. Επίσης ισχύει ότι $u < T$, διότι αν υποθέταμε ότι $u \geq T$, τότε θα υπήρχε μη αρνητικός αριθμός k , ώστε $u = T + k$. Άρα σε αυτή την περίπτωση θα είχαμε ότι $T' = n_0 \cdot T + u = n_0 \cdot T + T + k = (n_0+1) \cdot T + k$ και επομένως θα ίσχυε ότι $(n_0+1) \cdot T \leq T'$ άτοπο από (1). Συνοψίζοντας θα λέγαμε ότι αν $T' \neq T$, τότε υπάρχει ένας φυσικός αριθμός n_0 και ένας μη αρνητικός αριθμός u , ώστε $T' = n_0 \cdot T + u$ με $0 \leq u < T$. Τώρα, για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = f(x+T') = f(x+n_0 \cdot T + u) = f((x+u)+n_0 \cdot T) = f(x+u)$. Όμοια προκύπτει ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = f(x-u)$. Αν $u \neq 0$, τότε ο αριθμός u είναι μια περίοδος της συνάρτησης f μικρότερη από την ελάχιστη περίοδο T , άτοπο. Άρα $u=0$ και τότε προκύπτει ότι $T' = n_0 \cdot T$. Δηλαδή κάθε περίοδος της συνάρτησης f είναι αναγκαστικά θετικό ακέραιο πολλαπλάσιο της ελάχιστης περιόδου. //

ΘΕΩΡΗΜΑ 3: Έστω περιοδική συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το σύνολο A_f και T μια περίοδος της. Αν η συνάρτηση g ορίζεται μέσω της f από τον τύπο $g(x) = f(ax+\beta)$, με $a \neq 0$, τότε η g είναι περιοδική με μία



περίοδο τον αριθμό $\frac{T}{|a|}$. Αν η συνάρτηση f έχει ελάχιστη περίοδο τον αριθμό T_0 , τότε η g έχει ελάχιστη περίοδο τον αριθμό $\frac{T_0}{|a|}$.

Απόδειξη: Το ευρύτερο πεδίο ορισμού το οποίο μπορεί να έχει η συνάρτηση g είναι το σύνολο $A_g = \{x \in \mathbf{R} / ax + \beta \in A_f\}$. Παρακάτω θα θεωρούμε ως πεδίο ορισμού της g ακριβώς το σύνολο A_g . Παρατηρούμε ότι ισχύουν οι εξής ισοδυναμίες:

$$\begin{aligned} x \in A_g &\Leftrightarrow ax + \beta \in A_f \Leftrightarrow ax + \beta \pm T \in A_f \Leftrightarrow a\left(x \pm \frac{T}{a}\right) + \beta \in A_f \Leftrightarrow a\left(x \pm \frac{T}{|a|}\right) + \beta \\ &\in A_f \Leftrightarrow x \pm \frac{T}{|a|} \in A_g. \end{aligned}$$

Επίσης για κάθε $x \in A_g$ ισχύει:

$$\begin{aligned} g\left(x \pm \frac{T}{|a|}\right) &= f\left(a\left(x \pm \frac{T}{|a|}\right) + \beta\right) = f\left(a\left(x \pm \frac{T}{a}\right) + \beta\right) = \\ &= f(ax + \beta \pm T) = f(ax + \beta) = g(x). \end{aligned}$$

Άρα η g είναι περιοδική με μία περίοδο τον αριθμό $\frac{T}{|a|}$.

Έστω τώρα ότι η συνάρτηση f έχει ελάχιστη περίοδο τον αριθμό T_0 . Τότε όπως προκύπτει από τα προηγούμενα, ο αριθμός $\frac{T_0}{|a|}$ είναι μια περίοδος της συνάρτησης g . Θα δείξουμε πως κάθε περίοδος της g είναι της μορφής $T_g = n \cdot \frac{T_0}{|a|}$, όπου n φυσικός θετικός αριθμός και άρα η ελάχιστη περίοδος της g είναι ακριβώς ο αριθμός $\frac{T_0}{|a|}$.

Έστω $y \in A_f$ και T_g μια περίοδος της g . Τότε ο αριθμός $x = \frac{y - \beta}{a} \in A_g$, διότι $ax + \beta = \frac{y - \beta}{a} \cdot a + \beta = y \in A_f$. Επίσης αν $y \in A_f$ και $x = \frac{y - \beta}{a}$, τότε $y = ax + \beta$.

Επιπλέον για τα x και y όπως ορίστηκαν παραπάνω ισχύουν οι ισοδυναμίες $y \in A_f \Leftrightarrow x \in A_g \Leftrightarrow x \pm T_g \in A_g \Leftrightarrow \alpha(x \pm T_g) + \beta \in A_f \Leftrightarrow \alpha x + \beta \pm \alpha \cdot T_g \in A_f \Leftrightarrow \alpha x + \beta \pm |\alpha| \cdot T_g \in A_f \Leftrightarrow y \pm |\alpha| \cdot T_g \in A_f$.

Ακόμη, $f(y) = f(\alpha x + \beta) = g(x) = g(x \pm T_g) = f(\alpha(x \pm T_g) + \beta) = f(\alpha x + \beta \pm \alpha \cdot T_g) = f(\alpha x + \beta \pm |\alpha| \cdot T_g) = f(y \pm |\alpha| \cdot T_g)$.

Δηλαδή για κάθε $y \in A_f$ ισχύει: $y \pm |\alpha| \cdot T_g \in A_f$ και $f(y) = f(y \pm |\alpha| \cdot T_g)$.

Επομένως ο αριθμός $|\alpha| \cdot T_g$ θα είναι μια περίοδος της f . Επειδή η f έχει ελάχιστη περίοδο τον αριθμό T_o , τότε σύμφωνα με το θεώρημα 2 θα ισχύει ότι $|\alpha| \cdot T_g = \nu \cdot T_o \Leftrightarrow T_g = \nu \cdot \frac{T_o}{|\alpha|}$ όπου ν θετικός φυσικός αριθμός. //

ΕΝΟΤΗΤΑ 5^η: ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ.

1) Η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x$.

Για να σχεδιάσουμε αποτελεσματικά τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης, πρέπει να εξετάσουμε το πεδίο ορισμού της, τις συμμετρίες και την περιοδικότητα. Φυσικά μια πρώτη προσέγγιση μπορεί να γίνει από τη δημιουργία ενός πίνακα τιμών.

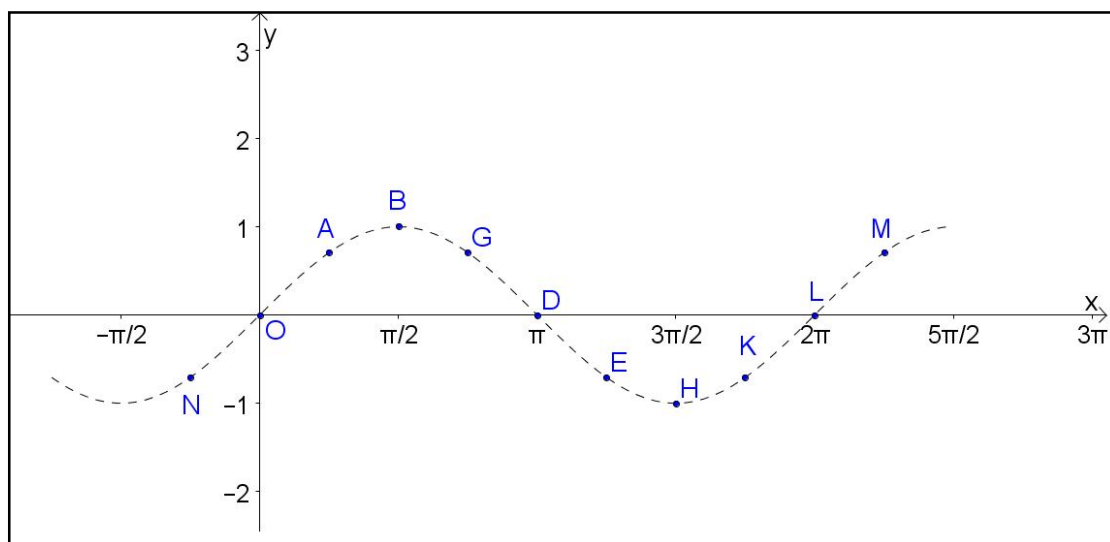
Πεδίο Ορισμού:

Η παράσταση $\eta\mu x$ ορίζεται για κάθε γωνία μέτρου x rad. Επομένως το ευρύτερο σύνολο στο οποίο μπορεί να οριστεί η συνάρτηση με τύπο $f(x)=\eta\mu x$ είναι το $A=\mathbf{R}$.

Πίνακας Τιμών:

x	$\eta\mu x$
$-3\pi/4$	$-\sqrt{2}/2$
$-\pi/2$	-1
$-\pi/4$	$-\sqrt{2}/2$
0	0
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$
$\pi/2$	1
$3\pi/4$	$\sqrt{2}/2$
π	0
$5\pi/4$	$-\sqrt{2}/2$
$3\pi/2$	-1
$7\pi/4$	$-\sqrt{2}/2$
2π	0
$9\pi/4$	$\sqrt{2}/2$
$5\pi/2$	1

Μια πρόχειρη γραφική παράσταση που προκύπτει από τον πίνακα τιμών είναι η εξής:



ΣΧ. 1

Μελετώντας τις συμμετρίες και την περιοδικότητα θα μπορέσουμε να κατανοήσουμε καλύτερα τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.

Συμμετρίες:



Η συνάρτηση f είναι περιττή διότι:

- Για $x \in A = \mathbf{R}$ προκύπτει ότι και $-x \in A = \mathbf{R}$.
- $f(-x) = \eta\mu(-x) = -\eta\mu x = -f(x)$.

Αυτό σημαίνει ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f παρουσιάζει συμμετρία με κέντρο την αρχή O των αξόνων.

Περιοδικότητα:



ΘΕΩΡΗΜΑ 1: Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ με $x \in \mathbf{R}$ είναι περιοδική με (ελάχιστη) περίοδο τον αριθμό $T_0 = 2\pi$.

Απόδειξη: Για κάθε $x \in A = \mathbf{R}$ έπεται προφανώς ότι και $x \pm 2\pi \in A = \mathbf{R}$.

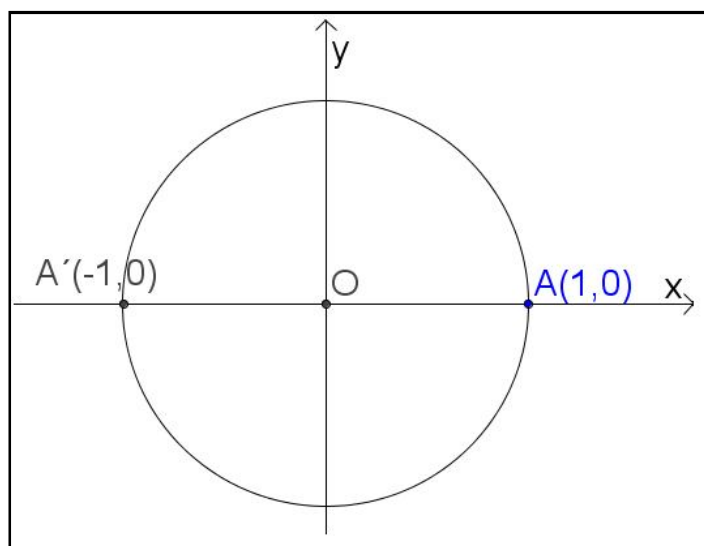
Ακόμη:

$$f(x+2\pi) = \eta\mu(x+2\pi) = \eta\mu(2\pi+x) = \eta\mu x = f(x) \text{ και}$$

$$f(x-2\pi) = \eta\mu(x-2\pi) = \eta\mu(-(2\pi-x)) = -\eta\mu(2\pi-x) = -\eta\mu(-x) = -(-\eta\mu x) = \eta\mu x = f(x).$$

Άρα ο αριθμός $T_0 = 2\pi$ είναι μια περίοδος της συνάρτησης f .

Παρακάτω θα δείξουμε ότι ο αριθμός T_0 είναι η ελάχιστη περίοδος. Προς τούτο, θα εξετάσουμε την αναγκαία συνθήκη για να είναι ένας αριθμός T περίοδος της συνάρτησης f . Έστω λοιπόν $T > 0$ μια περίοδος της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu x$. Τότε για κάθε $x \in \mathbf{R}$ θα ισχύει $f(x+T) = f(x)$. Άρα και για $x=0$, θα ισχύει $f(0+T) = f(0) \Leftrightarrow \eta\mu T = \eta\mu 0 \Leftrightarrow \eta\mu T = 0$. Οι γωνίες που έχουν ημίτονο ίσο με το μηδέν, θα έχουν τελική πλευρά την OA ή την OA' (βλ. σχήμα 2).

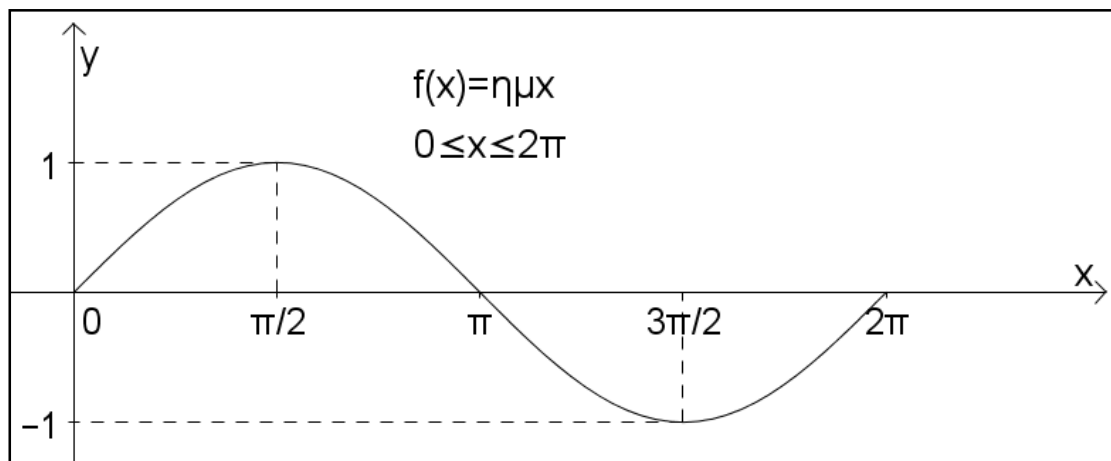


ΣΧ. 2

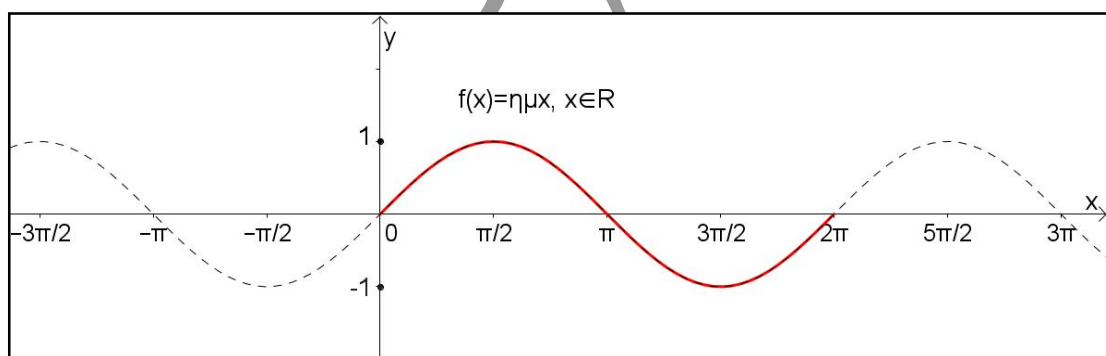
Μια γνωστή γωνία που έχει τελική πλευρά την OA είναι η $\omega = 0 \text{ rad}$. Σύμφωνα λοιπόν με το παράδειγμα 6 της ενότητας 1, οι γωνίες θ που έχουν τελική πλευρά την OA ή την OA' θα έχουν μέτρο της μορφής $\theta = k\pi + \omega$ δηλαδή $\theta = k\pi$, όπου $k \in \mathbf{Z}$. Άρα $T = k\pi$ με $k \in \mathbf{Z}$ και επειδή $T > 0$ έπεται ότι $k=1$ ή 2 ή 3 κ.τ.λ. Δηλαδή $T=\pi$ ή $T=2\pi$ ή $T=3\pi$ κ.τ.λ.

Ωστόσο η παραπάνω συνθήκη είναι αναγκαία και όχι ικανή, δηλαδή οι προηγούμενες τιμές δείχνουν ποιες είναι οι πιθανές περίοδοι της συνάρτησης f . Δείξαμε στην αρχή της απόδειξης ότι ο αριθμός $T_0=2\pi$ είναι μια περίοδος της συνάρτησης f . Αν ο αριθμός T_0 δεν είναι η ελάχιστη περίοδος, τότε θα είναι ο αριθμός $T_1=\pi$. Αυτό όμως δεν συμβαίνει διότι π.χ. $\eta\mu(\pi + \frac{\pi}{3}) \neq \eta\mu \frac{\pi}{3}$. Επομένως η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ με $x \in \mathbf{R}$ είναι περιοδική με ελάχιστη περίοδο τον αριθμό $T_0=2\pi$.

Αφού λοιπόν η συνάρτηση f είναι περιοδική με (ελάχιστη) περίοδο τον αριθμό $T_0=2\pi$, τότε μπορούμε να παραστήσουμε τη γραφική παράσταση σε πλάτος μιας περιόδου π.χ. για $x \in [0, 2\pi]$ (σχήμα 3) και ύστερα να «αντιγράψουμε» άπειρες φορές τόσο δεξιά, όσο και αριστερά το γράφημα αυτό (σχήμα 4):



ΣΧ. 3



ΣΧ. 4



Στο διάστημα $[0, 2\pi]$ η συνάρτηση f :

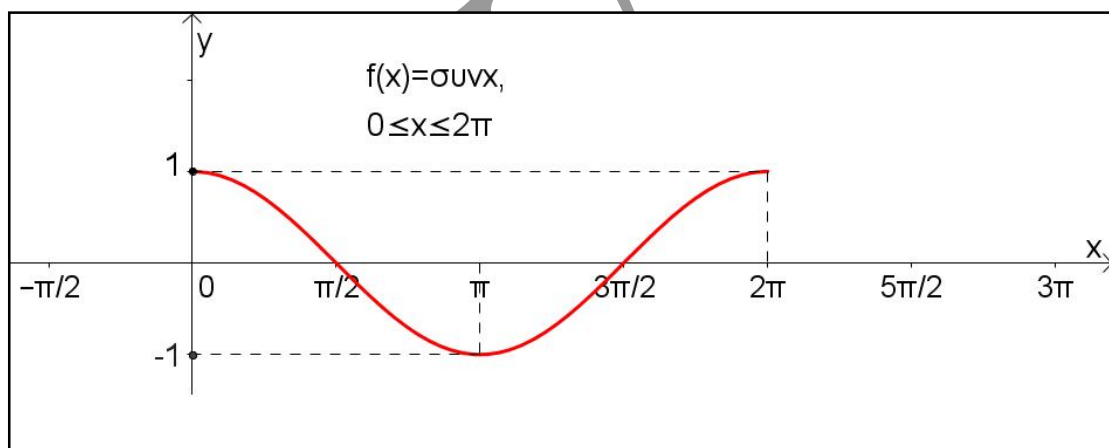
- Έχει μέγιστη τιμή το 1 για $x = \frac{\pi}{2}$ και ελάχιστη τιμή το -1 για $x = \frac{3\pi}{2}$.
- Είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $[0, \frac{\pi}{2}]$ και $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.

2) Η συνάρτηση $g(x)=\sin x$.

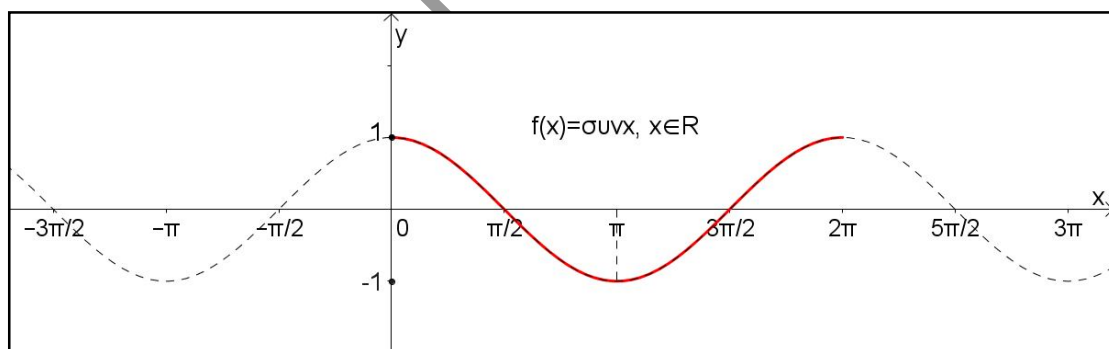
Όμοια εργαζόμενοι όπως στην περίπτωση του ημιτόνου, καταλήγουμε στα εξής συμπεράσματα:

- Η $g(x)=\sin x$ μπορεί να οριστεί σε όλο το $\mathbf{R}$.
- Είναι άρτια, διότι $g(-x)=\sin(-x)=\sin x=g(x)$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$.
Επομένως η γραφική της παράσταση παρουσιάζει συμμετρία ως προς τον άξονα $y'y$.
- Είναι περιοδική με (ελάχιστη) περίοδο τον αριθμό $T_0=2\pi$.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης g σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου ($x \in [0, 2\pi]$) και για $x \in \mathbf{R}$ φαίνονται στα σχήματα 5 και 6 αντίστοιχα:



ΣΧ. 5



ΣΧ. 6

Στο διάστημα $[0, 2\pi]$ η συνάρτηση g :

- Έχει μέγιστη τιμή το 1 για $x=0$ και $x=2\pi$ και ελάχιστη τιμή το -1 για $x=\pi$.
- Είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[\pi, 2\pi]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0,\pi]$.

3) Η συνάρτηση $h(x)=\epsilon\phi x$.



Πεδίο Ορισμού: Έχουμε ήδη μάθει στην πρώτη ενότητα ότι η παράσταση $\epsilon\phi x$ ορίζεται για κάθε πραγματικό αριθμό x που έχει την ιδιότητα: $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ για κάθε $k \in \mathbf{Z}$. Άρα το πεδίο ορισμού είναι το

σύνολο $A_{\epsilon\phi} = \{x \in \mathbf{R} / x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \text{ για κάθε } k \in \mathbf{Z}\}$. Επειδή

$k\pi + \frac{\pi}{2} = (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}$, τότε θέτοντας ακέραιες τιμές για το k προκύπτουν στην προηγούμενη παράσταση περιττά πολλαπλάσια του π . Π.χ. για $k=2$, -2 και 3 προκύπτουν οι αριθμοί $\frac{5\pi}{2}$, $-\frac{3\pi}{2}$ και $\frac{7\pi}{2}$ αντίστοιχα.

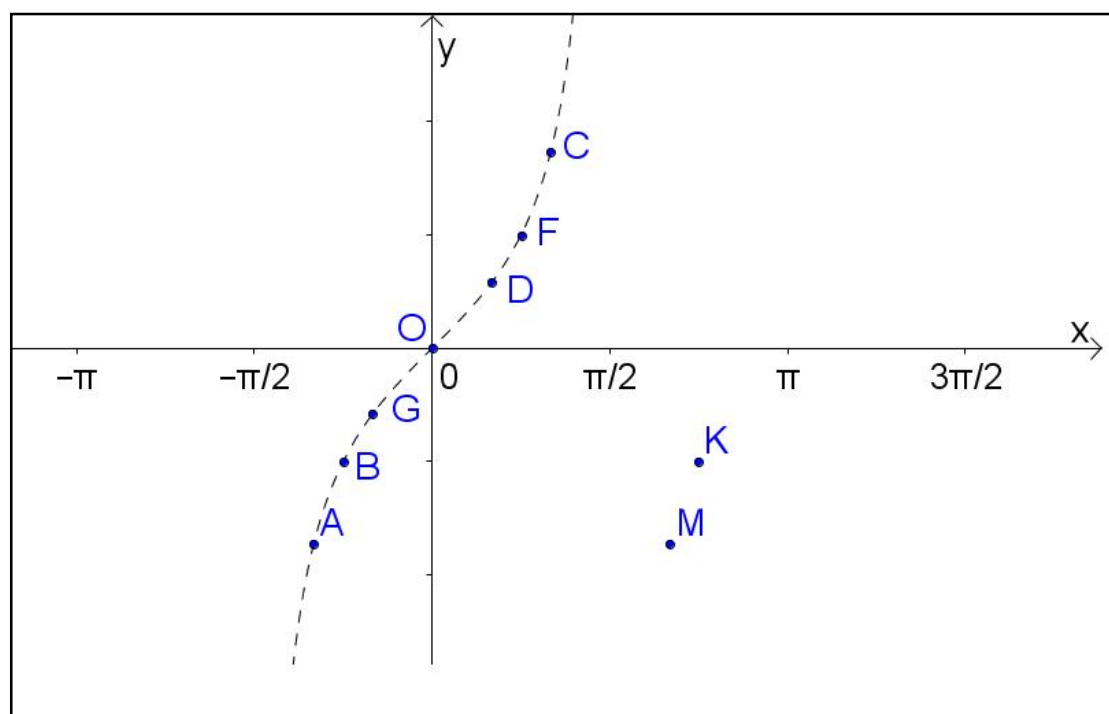
Επομένως ο περιορισμός $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ για κάθε $k \in \mathbf{Z}$ είναι ισοδύναμος με

το ότι $x \neq \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \pm \frac{5\pi}{2}$ κ.τ.λ. Αυτό έχει ως συνέπεια η γραφική παράσταση της συνάρτησης h να μην έχει κοινά σημεία με τις κατακόρυφες ευθείες $x = \pm \frac{\pi}{2}, x = \pm \frac{3\pi}{2}, x = \pm \frac{5\pi}{2}$ κ.τ.λ.

Πίνακας Τιμών:

x	$\epsilon\phi x$
$-\pi/3$	$-\sqrt{3}$
$-\pi/4$	-1
$-\pi/6$	$-\sqrt{3}/3$
0	0
$\pi/6$	$\sqrt{3}/3$
$\pi/4$	1
$\pi/3$	$\sqrt{3}$
$2\pi/3$	$-\sqrt{3}$
$3\pi/4$	-1

Μια πρόχειρη γραφική παράσταση που προκύπτει από τον πίνακα τιμών είναι η εξής:



ΣΧ. 7

Συμμετρίες: Αν $x \in A_{\text{εφ}} \Leftrightarrow x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ για κάθε $k \in \mathbf{Z}$. Τότε $-x \neq -k\pi - \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -x \neq -k\pi - \pi + \pi - \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -x \neq (-k-1)\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -x \neq \lambda\pi + \frac{\pi}{2}$, όπου ο αριθμός $\lambda = -k-1$ είναι ακέραιος. Άρα όταν $x \in A_{\text{εφ}}$, τότε $-x \in A_{\text{εφ}}$. Επιπλέον, $h(-x) = \text{εφ}(-x) = -\text{εφ}x = -h(x)$.



Επομένως η h είναι περιττή και άρα η γραφική της παράσταση παρουσιάζει συμμετρία με κέντρο την αρχή των αξόνων.

Περιοδικότητα:

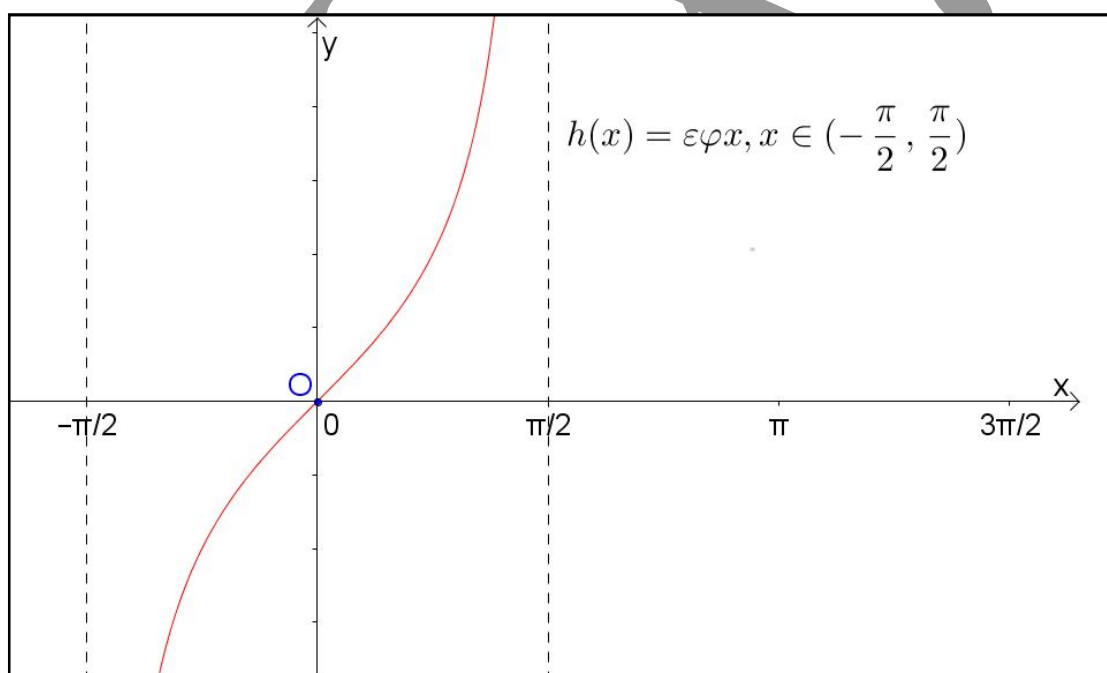


ΘΕΩΡΗΜΑ 2: Η συνάρτηση $h(x) = \text{εφ}x$ με $x \in A_{\text{εφ}} = \{x \in \mathbf{R} / x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \text{ για κάθε } k \in \mathbf{Z}\}$ είναι περιοδική με (ελάχιστη) περίοδο τον αριθμό $T_0 = \pi$.

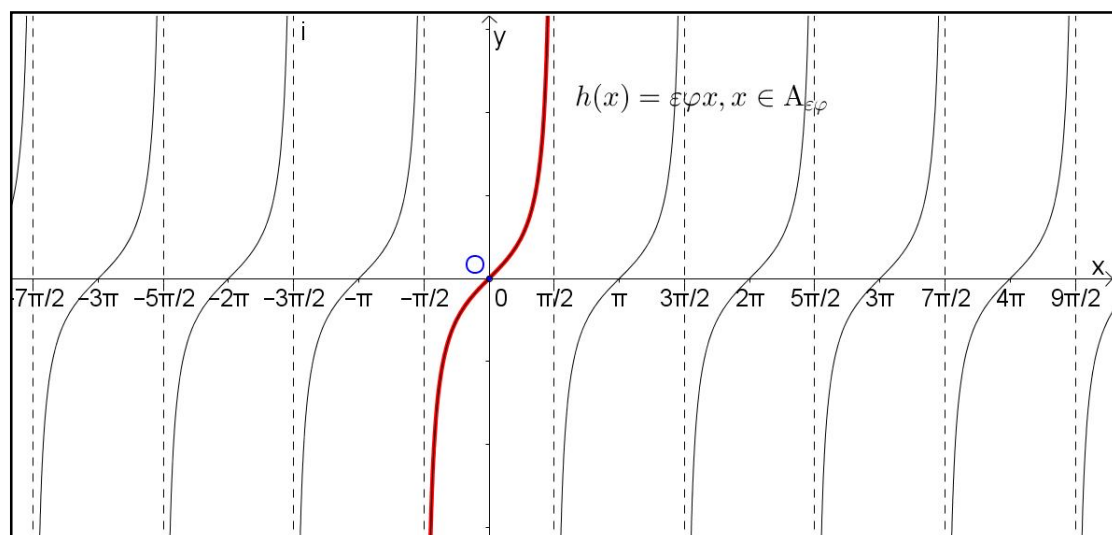
Απόδειξη: Έστω $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ για κάθε $k \in \mathbf{Z}$. Τότε $x + \pi \neq k\pi + \frac{\pi}{2} + \pi \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x + \pi \neq (k+1)\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x + \pi \neq \lambda\pi + \frac{\pi}{2}$, όπου $\lambda = k+1$ και επειδή $k \in \mathbf{Z}$,
 τότε και $\lambda \in \mathbf{Z}$. Άρα αν $x \in A_{\varepsilon\varphi}$, τότε και $x + \pi \in A_{\varepsilon\varphi}$. Το ίδιο ισχύει και για
 τον αριθμό $x - \pi$. Επομένως, αν $x \in A_{\varepsilon\varphi} \Rightarrow x \pm \pi \in A_{\varepsilon\varphi}$.

Επιπλέον, $h(x + \pi) = \varepsilon\varphi(x + \pi) = \varepsilon\varphi x = h(x)$ και $h(x - \pi) = \varepsilon\varphi(x - \pi) = \varepsilon\varphi(-(\pi - x)) =$
 $= -\varepsilon\varphi(\pi - x) = -(-\varepsilon\varphi x) = \varepsilon\varphi x = h(x)$. Άρα ο αριθμός $T_0 = \pi$ είναι μια περίοδος
 της h . Το ότι ο αριθμός αυτός είναι και η ελάχιστη περίοδος
 αποδεικνύεται όμοια, όπως στην περίπτωση του ημιτόνου και για αυτό η
 απόδειξη παραλείπεται. //

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης h σε διάστημα πλάτους μιας
 περιόδου ($x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$) και για $x \in A_{\varepsilon\varphi}$ φαίνονται στα σχήματα 8 και 9
 αντίστοιχα:



ΣΧ. 8



ΣΧ. 9

Σε καθένα από τα διαστήματα $(κ \cdot \pi + \frac{\pi}{2}, (κ+1) \cdot \pi + \frac{\pi}{2})$, $κ \in \mathbf{Z}$ η h είναι γνησίως αύξουσα και δεν έχει ακρότατα.

4) Η συνάρτηση $d(x) = \sigma\phi x$.



Πεδίο Ορισμού: Γνωρίζουμε ότι η παράσταση $\sigma\phi x$ ορίζεται για κάθε πραγματικό αριθμό x που έχει την ιδιότητα $x \neq κ\pi$ για κάθε $κ \in \mathbf{Z}$. Άρα η συνάρτηση d θα έχει ως πεδίο ορισμού τη συνάρτηση $A_{\sigma\phi} = \{x \in \mathbf{R} / x \neq κ\pi \text{ για κάθε } κ \in \mathbf{Z}\}$. Αυτό σημαίνει ότι η γραφική παράσταση της συνεφαπτομένης δεν θα τέμνει τις κατακόρυφες ευθείες $x=0$, $x=\pm\pi$, $x=\pm2\pi$, $x=\pm3\pi$ κ.τ.λ.

Με ανάλογο τρόπο όπως στην περίπτωση του ημιτόνου και της εφαπτομένης αποδεικνύεται ότι:



- Η d είναι περιττή.
- Έχει ελάχιστη περίοδο τον αριθμό $T_0 = \pi$.

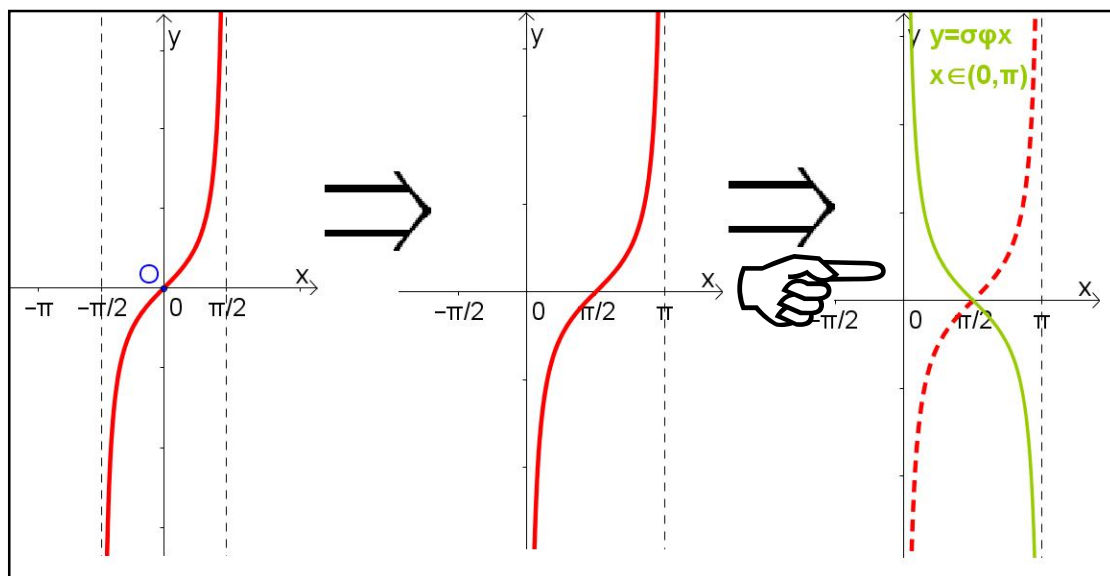
Η γραφική παράσταση της συνεφαπτομένης προκύπτει από τη γραφική παράσταση της εφαπτομένης με τη βοήθεια της παρακάτω ισότητας:

$$g(x) = \sigma\phi x = \epsilon\phi\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \epsilon\phi\left(-\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) = -\epsilon\phi\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -h\left(x - \frac{\pi}{2}\right), \text{ όπου}$$

$h(x) = \epsilon\phi x$. Επομένως για να βρούμε τη γραφική παράσταση της d σε πλάτος μιας περιόδου, εφαρμόζουμε τους παρακάτω μετασχηματισμούς :

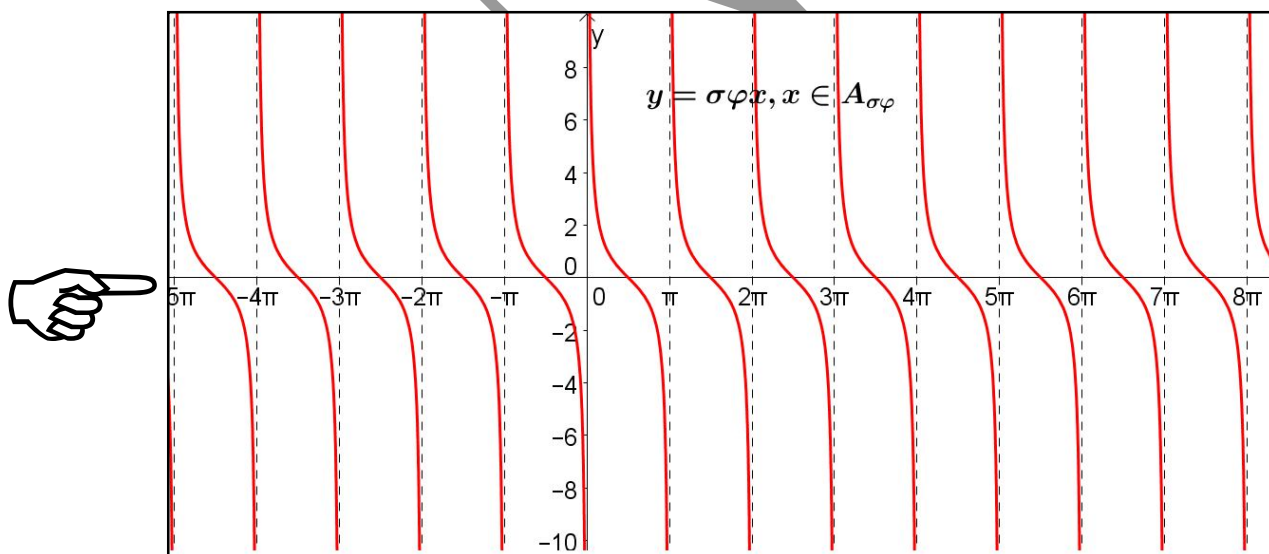
(α) σχεδιάζουμε τη συνάρτηση $h \rightarrow$ (β) τη μετατοπίζουμε $\pi/2$ μονάδες δεξιά $\rightarrow$ (γ) σχεδιάζουμε τη συμμετρική ως προς τον άξονα $x'x$ της γραφικής παράστασης που έχει προκύψει από το (β).

Με αυτό τον τρόπο προκύπτει η γραφική παράσταση της d σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου ($x \in (0, \pi)$):



ΣΧ. 10

Η γραφική παράσταση της d σε όλο το $A_{\sigma\phi}$ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



ΣΧ. 11

Επομένως σε κάθε διάστημα της μορφής $(k\pi, (k+1)\pi)$, όπου $k \in \mathbb{Z}$ η συνάρτηση d είναι γνησίως φθίνουσα και άρα δεν έχει ακρότατα.

5) Οι συναρτήσεις της μορφής $f(x)=a\eta\mu(\omega x+\beta)$, $g(x)=a\sigma\upsilon\eta(\omega x+\beta)$, $h(x)=a\epsilon\phi(\omega x+\beta)$ και $d(x)=a\sigma\phi(\omega x+\beta)$ με $a \neq 0$ και $\omega \neq 0$.



Σύμφωνα με το θεώρημα 3 της ενότητας 4 οι συναρτήσεις $y=a\eta\mu(\omega x+\beta)$ και $y=a\sigma\upsilon\eta(\omega x+\beta)$ θα είναι περιοδικές με ελάχιστη περίοδο τον αριθμό $T_1=(2\pi)/|\omega|$, ενώ οι συναρτήσεις $y=a\epsilon\phi(\omega x+\beta)$ και $y=a\sigma\phi(\omega x+\beta)$ θα έχουν ελάχιστη περίοδο τον αριθμό $T_2=\pi/|\omega|$. Οι γραφικές παραστάσεις αυτών των συναρτήσεων θα προκύπτουν αντίστοιχα από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y=a\eta\mu(\omega x)$, $y=a\sigma\upsilon\eta(\omega x)$, $y=a\epsilon\phi(\omega x)$ και $y=a\sigma\phi(\omega x)$ με μετατόπιση $|\beta|$ μονάδων αριστερά αν $\beta > 0$ ή δεξιά αν $\beta < 0$. Επίσης οι συναρτήσεις $y=a\eta\mu(\omega x+\beta)$ και $y=a\sigma\upsilon\eta(\omega x+\beta)$ θα έχουν μέγιστη τιμή τον αριθμό $|a|$ και ελάχιστη τον αριθμό $-|a|$.

5) Παραδείγματα

Παράδειγμα 1: Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=3\eta\mu(2x)$.

- Να υπολογίσετε την περίοδο της συνάρτησης αυτής.
- Να υπολογίσετε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης αυτής.
- Να σχεδιάσετε σε κοινό σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g , όπου $g(x)=\eta\mu x$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

Λύση: α) Η περίοδος είναι ίση με $T_f = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = \pi$, όπου ο αριθμός $\omega=2$ είναι ο συντελεστής του x .

β) Η μέγιστη τιμή της f είναι ίση με 3 και η ελάχιστη είναι ίση με -3 .

γ) Για να σχεδιάσουμε τη γραφική συνάρτηση της f σε πλάτος μιας περιόδου, σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα θέτοντας στην παράσταση $2x$ τις τιμές $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ και 2π :

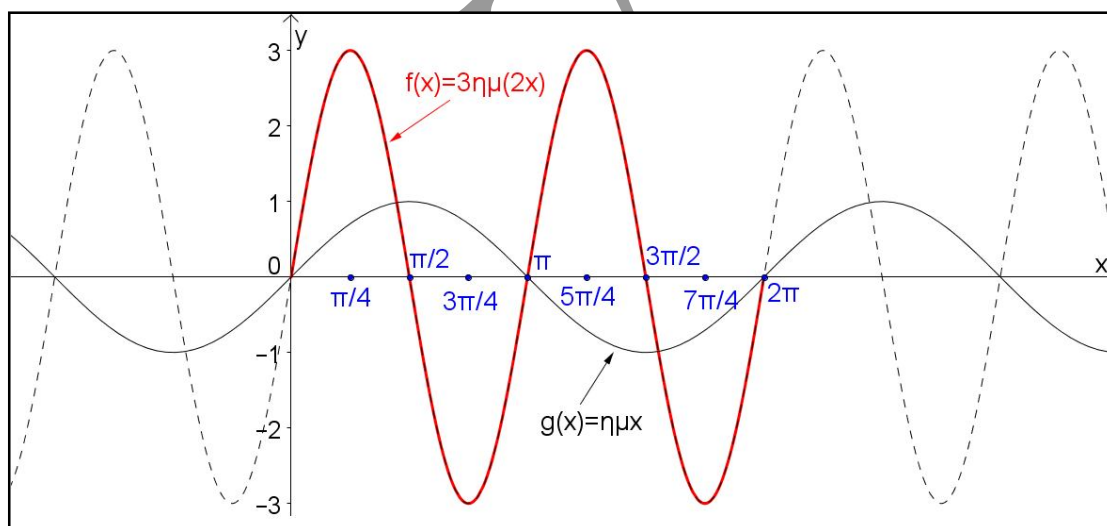
$2x$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
x	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
$\eta\mu(2x)$	0	1	0	-1	0
$3\eta\mu(2x)$	0	3	0	-3	0

Παρατηρούμε ότι στη 2^η γραμμή οι τιμές του x διαφέρουν κατά $\pi/4$: 0 , $\pi/4$, $\pi/2=\pi/4+\pi/4$, $3\pi/4=\pi/2+\pi/4$ κ.τ.λ.

Επειδή θέλουμε να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση όχι σε πλάτος μιας περιόδου αλλά για $x \in [0, 2\pi]$, θα επεκτείνουμε τις τιμές του x από το μηδέν μέχρι το 2π με βήμα $\pi/4$ και θα σχηματίσουμε τον επόμενο πίνακα:

x	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	2π
$g(x)=\eta\mu x$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
$f(x)=3\eta\mu(2x)$	0	3	0	-3	0	3	0	-3	0

Οι γραφικές παραστάσεις των f και g φαίνονται στο παρακάτω σχήμα:



ΣΧ. 12

Παράδειγμα 2: Αν $2\pi < x_1 < x_2 < 3\pi$, τότε να συγκρίνετε τους αριθμούς $\eta\mu \frac{x_1}{2}$ και $\eta\mu \frac{x_2}{2}$.

Λύση: Είναι $2\pi < x_1 < x_2 < 3\pi \Leftrightarrow \pi < \frac{x_1}{2} < \frac{x_2}{2} < \frac{3\pi}{2}$. Επειδή η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$ και επειδή $\frac{x_1}{2} < \frac{x_2}{2}$, έπεται ότι $\eta\mu \frac{x_1}{2} > \eta\mu \frac{x_2}{2}$.

Παράδειγμα 3: Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x)=\varepsilon\varphi\frac{x}{3}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση έχει περίοδο $T=3\pi$.

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

Λύση: α) Επειδή $\varepsilon\varphi\frac{x}{3}=\varepsilon\varphi(\frac{1}{3}x)$, τότε όπως είδαμε και στη θεωρία η περίοδος βρίσκεται από τον τύπο $T=\frac{\pi}{(1/3)}=3\pi$. Επειδή στα σχολικά βιβλία δεν αναφέρεται ο προηγούμενος τύπος, θα μπορούσαμε εναλλακτικά να δείξουμε ότι:

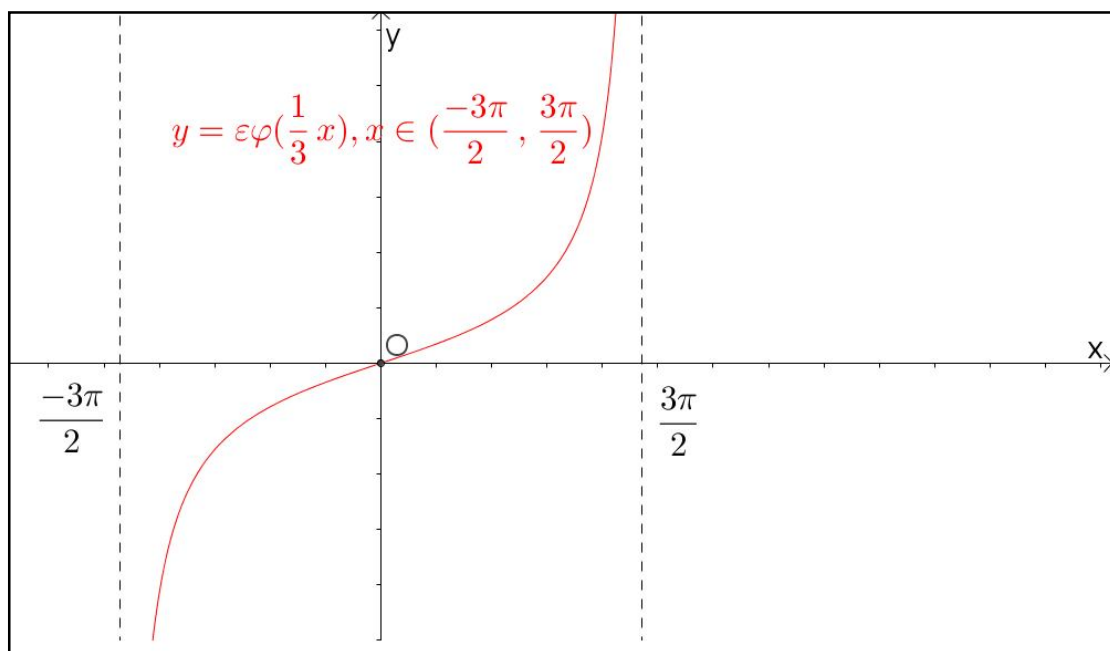
- για $x\in A$, τότε $x\pm 3\pi\in A$ (θέλει λίγο δουλειά), όπου A το πεδίο ορισμού της f .
- $f(x\pm 3\pi)=f(x)$ για κάθε $x\in A$.*

β) Αν είχαμε τη συνάρτηση $y=\varepsilon\varphi x$, τότε μερικές χαρακτηριστικές τιμές που θα μπορούσαμε να πάρουμε για τις τιμές του x σε πλάτος μιας περιόδου ($x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$) θα ήταν οι: $\pm\pi/2$ (όπου δεν ορίζεται), $\pm\pi/3$, $\pm\pi/4$ κ.τ.λ. Στην περίπτωση μας τώρα θα πάρουμε τις ίδιες τιμές για την παράσταση $(1/3)\cdot x$:

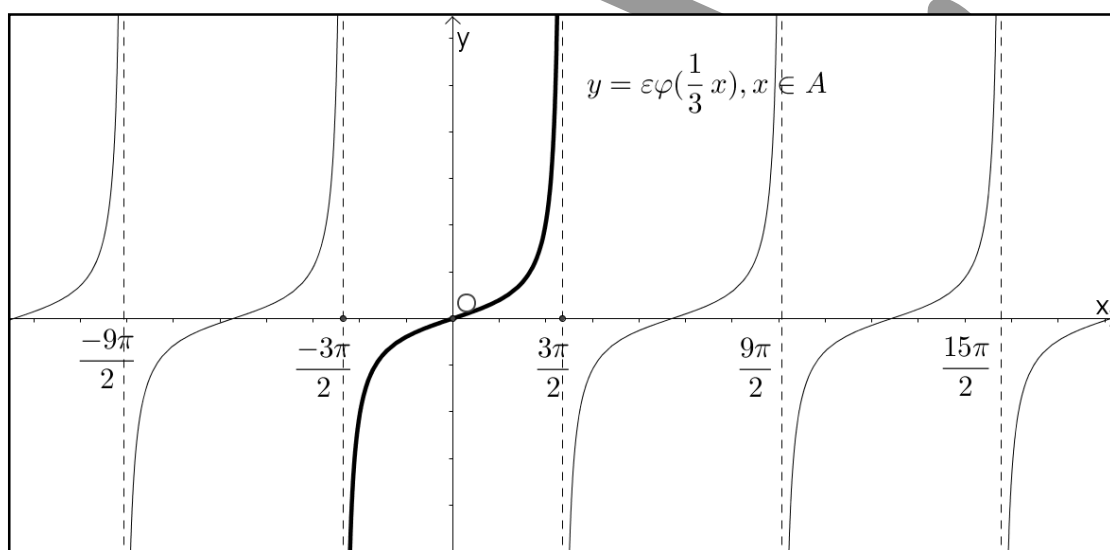
$\frac{1}{3}x$	$-\pi/2$	$-\pi/3$	$-\pi/4$	$-\pi/6$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
x	$-3\pi/2$	$-\pi$	$-3\pi/4$	$-\pi/2$	0	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$3\pi/2$
$\varepsilon\varphi(\frac{1}{3}x)$	ΔΕΝ ΟΡΙΖΕΤΑΙ	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	ΔΕΝ ΟΡΙΖΕΤΑΙ

Επομένως η γραφική παράσταση της f σε πλάτος μιας περιόδου και σε όλο το πεδίο ορισμού φαίνεται στα παρακάτω σχήματα:

* Ωστόσο αυτή η μέθοδος από μόνη της δεν είναι πλήρης, διότι δεν αποδεικνύει ότι ο αριθμός $T=3\pi$ είναι και η ελάχιστη περίοδος. Παρόλα αυτά και σύμφωνα με το πνεύμα του σχολικού βιβλίου είναι έγκυρη.



ΣΧ. 13



ΣΧ. 14

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Να σχεδιάσετε σε κοινό σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

- i) $f(x)=\eta\mu x$, $g(x)=3\eta\mu x$ και $h(x)=-3\eta\mu x$.
- ii) $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$, $g(x)=3\sigma\upsilon\nu x$ και $h(x)=-3\sigma\upsilon\nu x$.
- iii) $f(x)=\epsilon\phi x$, $g(x)=3\epsilon\phi x$ και $h(x)=-3\epsilon\phi x$.
- iv) $f(x)=\sigma\phi x$, $g(x)=3\sigma\phi x$ και $h(x)=-3\sigma\phi x$.

2) Να σχεδιάσετε σε κοινό σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

- i) $f(x)=\eta\mu x$, $g(x)=2+\eta\mu x$ και $h(x)=2-\eta\mu x$.
- ii) $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$, $g(x)=3+\sigma\upsilon\nu x$ και $h(x)=3-\sigma\upsilon\nu x$.
- iii) $f(x)=\epsilon\phi x$, $g(x)=1+\epsilon\phi x$ και $h(x)=1-\epsilon\phi x$.
- iv) $f(x)=\sigma\phi x$, $g(x)=1+\sigma\phi x$ και $h(x)=1-\sigma\phi x$.

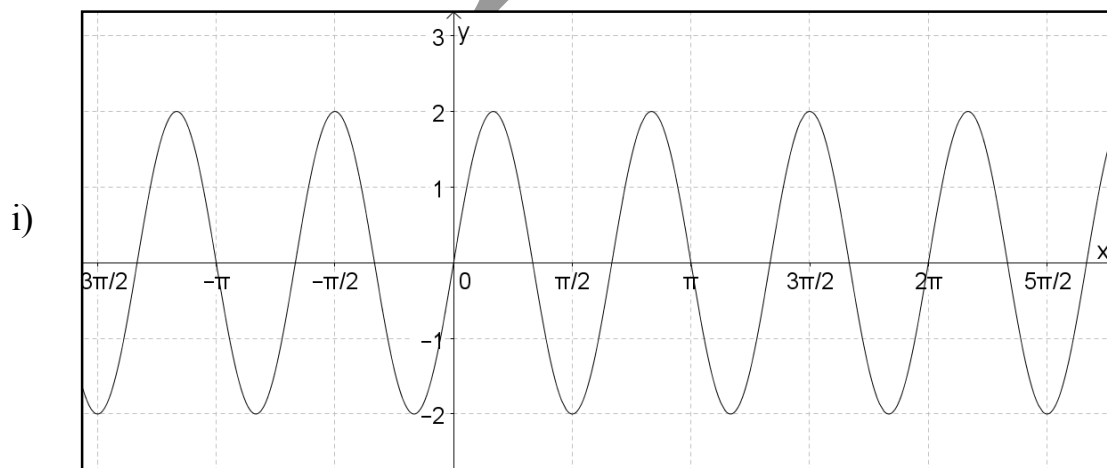
3) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου:

- i) $f(x)=\eta\mu 3x$.
- ii) $g(x)=\sigma\upsilon\nu(\frac{1}{2}x)$.
- iii) $h(x)=\epsilon\phi 2x$.
- iv) $d(x)=\sigma\phi(\frac{1}{4}x)$.

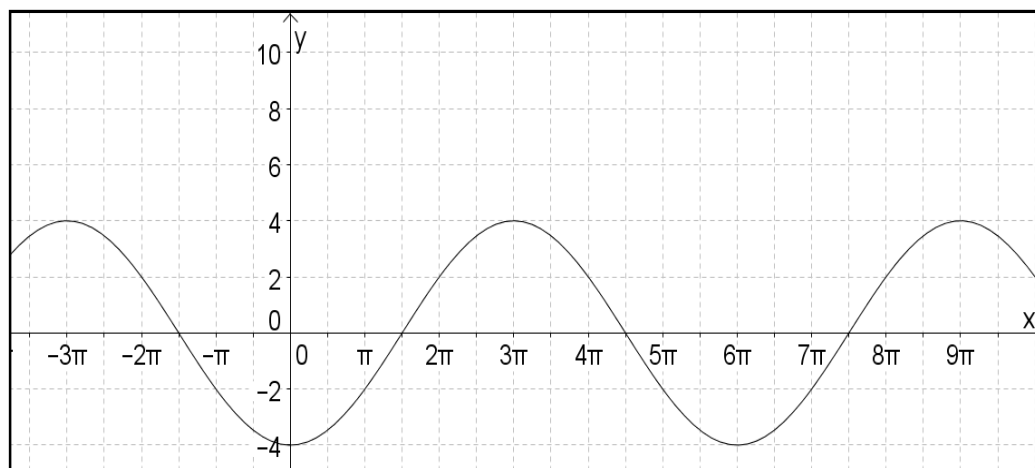
4) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων:

- i) $f(x)=\eta\mu(2x-\frac{\pi}{4})$.
- ii) $g(x)=-\sigma\upsilon\nu(2x+\frac{\pi}{3})$.

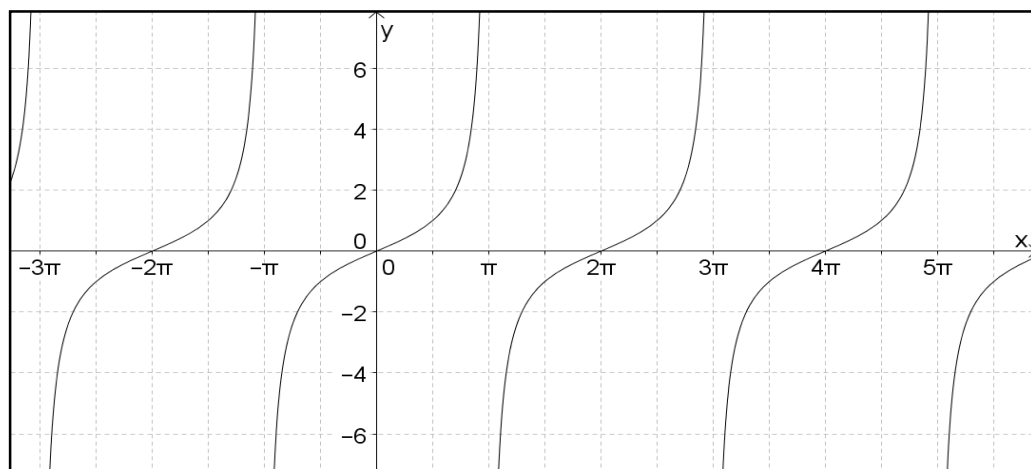
5) Να εκτιμήσετε τις εξισώσεις των παρακάτω τριγωνομετρικών καμπύλων:



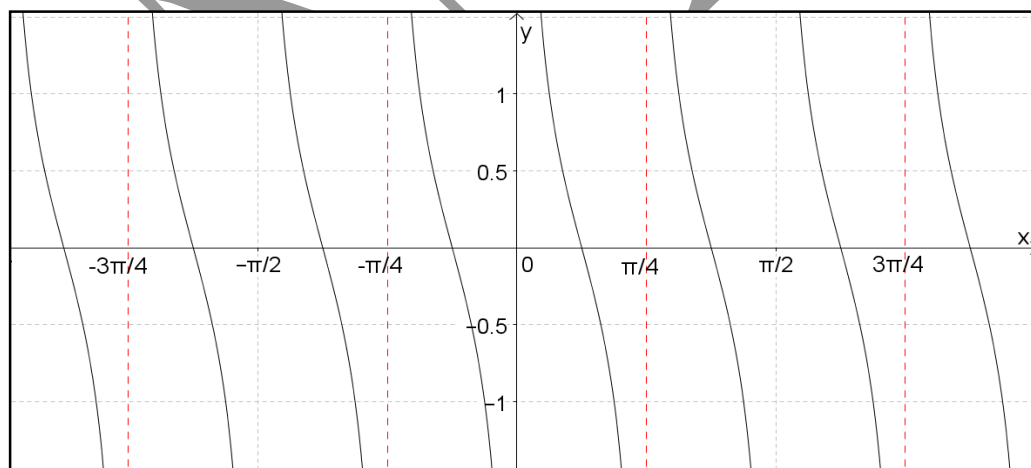
ii)



iii)



iv)



6) Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί x_1, x_2 με $3\pi < x_1, x_2 < 4\pi$. Να συγκρίνετε τους αριθμούς:

i) $\varepsilon\varphi \frac{x_1}{2}$ και $\varepsilon\varphi \frac{x_2}{2}$ και ii) $\varepsilon\varphi \frac{\pi - x_1}{2}$ και $\varepsilon\varphi \frac{\pi - x_2}{2}$.

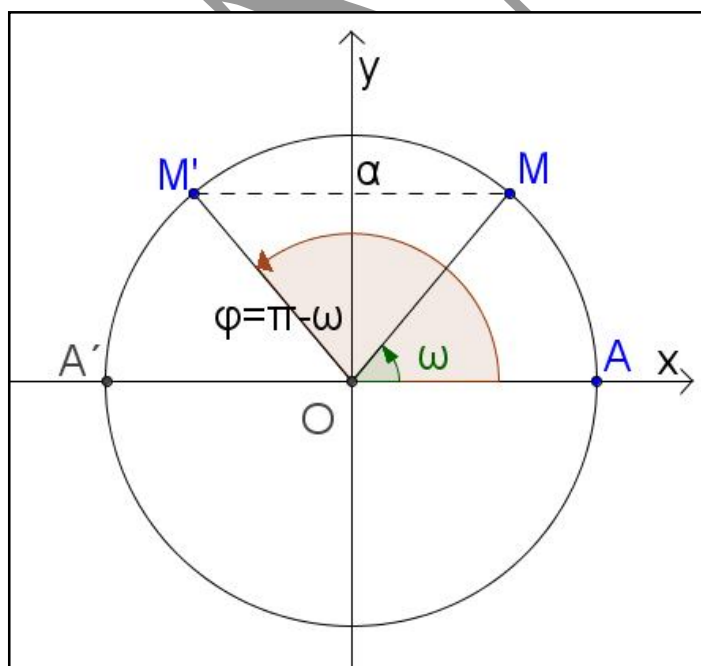
ΕΝΟΤΗΤΑ 6^η: ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ.

(1) Η εξίσωση $\eta\mu x = \alpha$.

Αναζητούμε όλες τις γωνίες με μέτρο x rad που είναι λύσεις της εξίσωσης $\eta\mu x = \alpha$. Θα δείξουμε ότι αν γνωρίζουμε μια γωνία με μέτρο ω rad που είναι λύση της προηγούμενης εξίσωσης, τότε μπορούμε να βρούμε και τις υπόλοιπες. Έστω λοιπόν ω μια τέτοια γωνία και η οποία έχει τελική πλευρά την OM (βλ. σχ.1). Τότε κάθε γωνία που έχει τελική πλευρά την OM θα έχει ημίτονο ίσο με α . Επίσης, όλες οι γωνίες με τελική πλευρά την OM θα έχουν μέτρο της μορφής $\kappa \cdot 2\pi + \omega$ rad, όπου $\kappa \in \mathbb{Z}$ (βλ. τους τύπους A και A' της ενότητας 1).

Έστω OM' η συμμετρική της OM ως προς τον άξονα $y'y$. Τότε όπως προκύπτει από τη συμμετρία, κάθε γωνία με τελική πλευρά την OM' θα έχει επίσης ημίτονο ίσο με α . Επιπλέον μια γωνία που έχει τελική πλευρά την OM' είναι η γωνία με μέτρο $\pi - \omega$ rad. Άρα κάθε γωνία που έχει τελική πλευρά την OM' θα έχει μέτρο της μορφής $\kappa \cdot 2\pi + \pi - \omega$ rad, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

Συνοψίζοντας, θα λέγαμε ότι όλες οι γωνίες που έχουν ημίτονο ίσο με α θα έχουν τελική πλευρά την OM ή την OM'. Αυτές που έχουν τελική πλευρά την OM έχουν μέτρα της μορφής $\kappa \cdot 2\pi + \omega$, $\kappa \in \mathbb{Z}$ και αυτές που έχουν τελική πλευρά την OM' έχουν μέτρα της μορφής $\kappa \cdot 2\pi + \pi - \omega$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.



ΣΧ. 1

Δείξαμε δηλαδή ότι ισχύει:



$$\eta\mu x = \eta\mu \omega \Leftrightarrow \begin{cases} x = \kappa \cdot 2\pi + \omega \\ \text{ή} \\ x = \kappa \cdot 2\pi + \pi - \omega \end{cases}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

Εφαρμογή 1: Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α) $\eta\mu x = \frac{1}{2}$.

(β) $\eta\mu x = -\frac{1}{2}$.

Λύση: (α) Γνωρίζουμε ότι $\eta\mu \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$. Άρα $\eta\mu x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \kappa \cdot 2\pi + \frac{\pi}{6} \\ \text{ή} \\ x = \kappa \cdot 2\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases}, \quad \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \kappa \cdot 2\pi + \frac{\pi}{6} \\ \text{ή} \\ x = \kappa \cdot 2\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Δηλαδή υπάρχουν άπειρες γωνίες που είναι λύσεις της αρχικής εξίσωσης.

Οι μισές από αυτές είναι της μορφής $x = \kappa \cdot 2\pi + \frac{\pi}{6}$ και οι άλλες μισές είναι

της μορφής $x = \kappa \cdot 2\pi + \frac{5\pi}{6}$, όπου $\kappa \in \mathbb{Z}$. Π.χ. για $\kappa=0$ παίρνουμε τις λύσεις

$$x_1 = \frac{\pi}{6} \text{ και } x_2 = \frac{5\pi}{6}.$$

(β) Από την ενότητα 3 γνωρίζουμε ότι $\eta\mu(-\omega) = -\eta\mu\omega$. Άρα

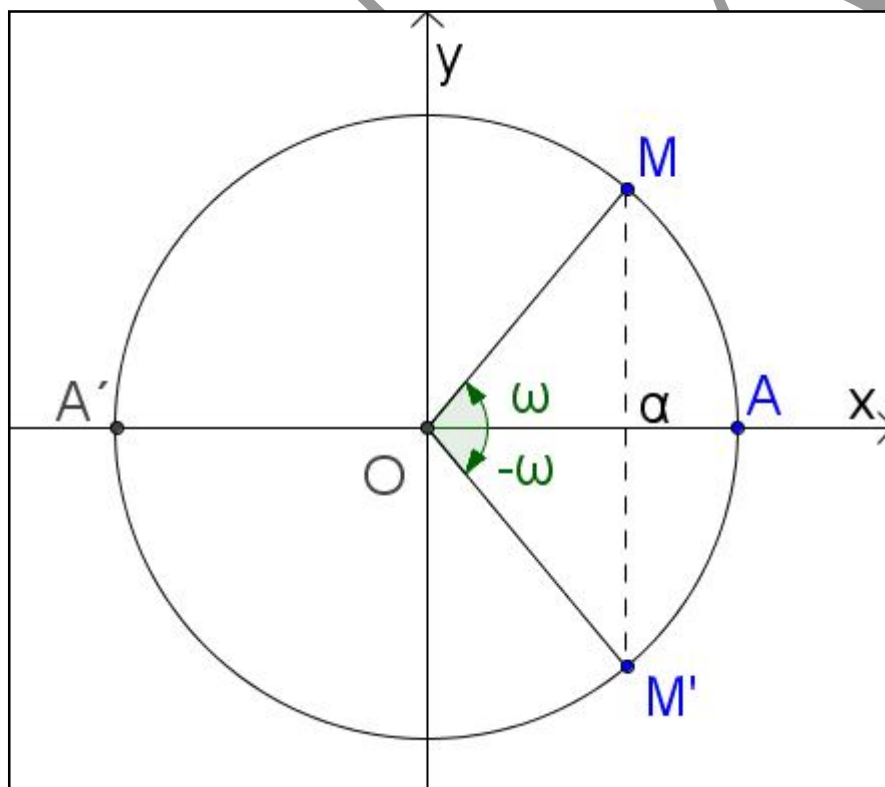
$$\eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\eta\mu \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}. \text{ Επομένως } \eta\mu x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \kappa \cdot 2\pi - \frac{\pi}{6} \\ \text{ή} \\ x = \kappa \cdot 2\pi + \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) \end{cases}, \quad \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \kappa \cdot 2\pi - \frac{\pi}{6} \\ \text{ή} \\ x = \kappa \cdot 2\pi + \frac{7\pi}{6} \end{cases}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}.$$

(2) Η εξίσωση $\sin x = a$.

Αναζητούμε όλες τις γωνίες με μέτρο x rad που είναι λύσεις της εξίσωσης $\sin x = a$. Θα δείξουμε, όπως και πριν, ότι αν γνωρίζουμε μια γωνία με μέτρο ω rad που είναι λύση της προηγούμενης εξίσωσης, τότε μπορούμε να βρούμε και τις υπόλοιπες. Έστω λοιπόν ω μια τέτοια γωνία και η οποία έχει τελική πλευρά την OM (βλ. σχ.2). Τότε κάθε γωνία που έχει τελική πλευρά την OM θα έχει συνημίτονο ίσο με a . Επίσης, όλες οι γωνίες με τελική πλευρά την OM θα έχουν μέτρο της μορφής $k \cdot 2\pi + \omega$ rad, όπου $k \in \mathbb{Z}$ (βλ. τους τύπους A και A' της ενότητας 1).

Έστω OM' η συμμετρική της OM ως προς τον άξονα $x'x$. Τότε όπως προκύπτει από τη συμμετρία, κάθε γωνία με τελική πλευρά την OM' θα έχει επίσης συνημίτονο ίσο με a . Επιπλέον μια γωνία που έχει τελική πλευρά την OM' είναι η γωνία με μέτρο $-\omega$ rad. Άρα κάθε γωνία που έχει τελική πλευρά την OM' θα έχει μέτρο της μορφής $k \cdot 2\pi - \omega$ rad, $k \in \mathbb{Z}$. Συνοψίζοντας, θα λέγαμε ότι όλες οι γωνίες που έχουν συνημίτονο ίσο με a θα έχουν τελική πλευρά την OM ή την OM' . Αυτές που έχουν τελική πλευρά την OM έχουν μέτρα της μορφής $k \cdot 2\pi + \omega$, $k \in \mathbb{Z}$ και αυτές που έχουν τελική πλευρά την OM' έχουν μέτρα της μορφής $k \cdot 2\pi - \omega$, $k \in \mathbb{Z}$.



ΣΧ. 2

Δείξαμε δηλαδή ότι ισχύει:



$$\sin x = \sin \omega \Leftrightarrow \begin{cases} x = \kappa \cdot 2\pi + \omega \\ \text{ή} \\ x = \kappa \cdot 2\pi - \omega \end{cases}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

Εφαρμογή 2: Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α) $\sin x = \frac{1}{2}$.

(β) $\sin x = -\frac{1}{2}$.

Λύση:

(α) Γνωρίζουμε ότι $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

Άρα, $\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \kappa \cdot 2\pi + \frac{\pi}{3} \\ \text{ή} \\ x = \kappa \cdot 2\pi - \frac{\pi}{3} \end{cases}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}.$

(β) Από την ενότητα 3 γνωρίζουμε ότι $\sin(-\omega) = -\sin \omega$. Αυτό σημαίνει ότι δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον παραπάνω τύπο. Εναλλακτικά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τους τύπους $\sin(\pi - \omega) = \sin \omega$ ή $\sin(\pi + \omega) = -\sin \omega$. Για παράδειγμα ισχύει $\sin(\pi - \frac{\pi}{3}) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

Επομένως: $\sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin(\pi - \frac{\pi}{3}) \Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow$

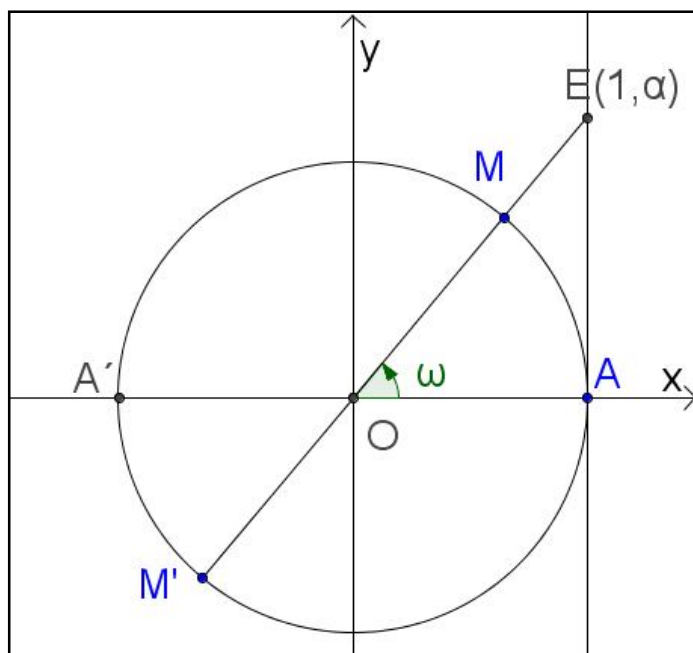
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \kappa \cdot 2\pi + \frac{2\pi}{3} \\ \text{ή} \\ x = \kappa \cdot 2\pi - \frac{2\pi}{3} \end{cases}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}.$$

(3) Η εξίσωση $\sin x = a$ και $\cos x = a$.

Αναζητούμε όλες τις γωνίες με μέτρο x rad που είναι λύσεις της εξίσωσης $\sin x = a$. Όπως και στα προηγούμενα, αν γνωρίζουμε μια γωνία με μέτρο ω rad που είναι λύση της προηγούμενης εξίσωσης, τότε

μπορούμε να βρούμε και τις υπόλοιπες. Πράγματι, έστω ω μια τέτοια γωνία και η οποία έχει τελική πλευρά την OM (βλ. σχ.3). Τότε κάθε γωνία που έχει τελική πλευρά την OM θα έχει εφαπτομένη ίση με α .

Έστω OM' η συμμετρική της OM με κέντρο συμμετρίας την αρχή O των αξόνων. Τότε όπως προκύπτει από τη συμμετρία, κάθε γωνία με τελική πλευρά την OM' θα έχει επίσης εφαπτομένη ίση με α .



ΣΧ. 3

Στην ενότητα 1-παράδειγμα 6 αποδείξαμε ότι αν μια γωνία ω έχει τελική πλευρά την OM και OM' είναι η συμμετρική της OM με κέντρο την αρχή O των αξόνων, τότε κάθε γωνία που έχει τελική πλευρά την OM ή την OM' θα έχει μέτρο ίσο με $\kappa \cdot \pi + \omega$ rad, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

Συνοψίζοντας, θα λέγαμε ότι όλες οι γωνίες που έχουν τελική πλευρά την OM ή την OM' έχουν μέτρα της μορφής $\kappa \cdot \pi + \omega$, $\kappa \in \mathbb{Z}$ και επιπλέον είναι οι μόνες γωνίες που έχουν εφαπτομένη ίσες με α .

Δείξαμε δηλαδή ότι ισχύει:



$$\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\omega \Leftrightarrow x = \kappa \cdot \pi + \omega, \kappa \in \mathbb{Z}$$

Όμοια αποδεικνύεται ότι:



$$\sigma\varphi x = \sigma\varphi\omega \Leftrightarrow x = \kappa \cdot \pi + \omega, \kappa \in \mathbb{Z}$$

Εφαρμογή 3: Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α) $\varepsilon\varphi x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

(β) $\sigma\varphi x = -\sqrt{3}$.

Λύση:

(α) Η παράσταση ορίζεται για $x \neq \kappa \cdot \pi + \frac{\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbf{Z}$. Επιπλέον, γνωρίζουμε ότι

$$\varepsilon\varphi \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}. \text{ Άρα, } \varepsilon\varphi x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \kappa \cdot \pi + \frac{\pi}{6}, \kappa \in \mathbf{Z}.$$

(β) Η παράσταση ορίζεται για $x \neq \kappa \cdot \pi$, $\kappa \in \mathbf{Z}$. Από την ενότητα 3 γνωρίζουμε ότι $\sigma\varphi(-\omega) = -\sigma\varphi\omega$. Άρα $\sigma\varphi(-\frac{\pi}{6}) = -\sigma\varphi(\frac{\pi}{6}) = -\sqrt{3}$. Επομένως

$$\sigma\varphi x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \sigma\varphi x = \sigma\varphi(-\frac{\pi}{6}) \Leftrightarrow x = \kappa \cdot \pi - \frac{\pi}{6}, \kappa \in \mathbf{Z}.$$

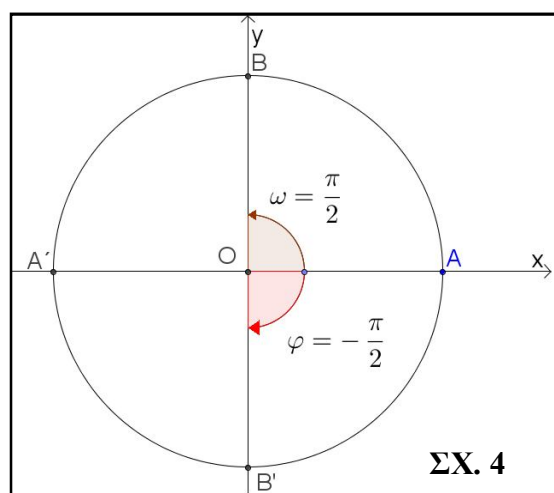
4) Παραδείγματα



Παράδειγμα 1 (Συγχώνευση τύπων): Να λυθεί η εξίσωση $\sin x = 0$. Ύστερα να βρείτε αυτές τις λύσεις που ανήκουν στο διάστημα $[0, 4\pi]$.

Λύση: Έχουμε $\sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \kappa \cdot 2\pi + \frac{\pi}{2} \\ \text{ή} \\ x = \kappa \cdot 2\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}, \kappa \in \mathbf{Z}.$

Οι γωνίες της πρώτης μορφής έχουν τελική πλευρά την OB και οι γωνίες της δεύτερης μορφής έχουν τελική πλευρά την OB'.



Σύμφωνα με το παράδειγμα 6 της ενότητας 1 οι δύο τύποι μπορούν να συγχωνευτούν στον τύπο $x = k \cdot \pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.



Καλό είναι να έχουμε υπόψη την περίπτωση στην οποία δύο τύποι μπορούν να συγχωνευτούν σε έναν. Αυτό συμβαίνει στην περίπτωση που οι δύο τύποι εκφράζουν γωνίες που είτε έχουν τις ίδιες τελικές πλευρές (βλ παράδειγμα 2) είτε οι τελικές τους πλευρές είναι συμμετρικές ως προς την αρχή Ο των αξόνων, όπως συμβαίνει σε αυτό το παράδειγμα.

Για να βρούμε τις λύσεις που ανήκουν στο διάστημα $[0, 4\pi]$, λύνουμε τη διπλή ανίσωση $0 \leq x \leq 4\pi \Leftrightarrow 0 \leq k \cdot \pi + \frac{\pi}{2} \leq 4\pi \Leftrightarrow 0 \leq \pi(k + \frac{1}{2}) \leq 4\pi \Leftrightarrow 0 \leq k + \frac{1}{2} \leq 4 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq k \leq 4 - \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq k \leq \frac{7}{2}$ όπου $k \in \mathbf{Z}$. Οι ακέραιοι που ανήκουν στο διάστημα $[-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}]$ είναι οι αριθμοί 0, 1, 2 και 3. Για $k=0$ ή 1 ή 2 ή 3 προκύπτουν οι λύσεις $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $x_2 = \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$, $x_3 = 2\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{2}$ και $x_4 = 3\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{7\pi}{2}$ αντίστοιχα.



Παράδειγμα 2 (Συγχώνευση τύπων): Να λυθεί η εξίσωση $\eta\mu x = -1$.

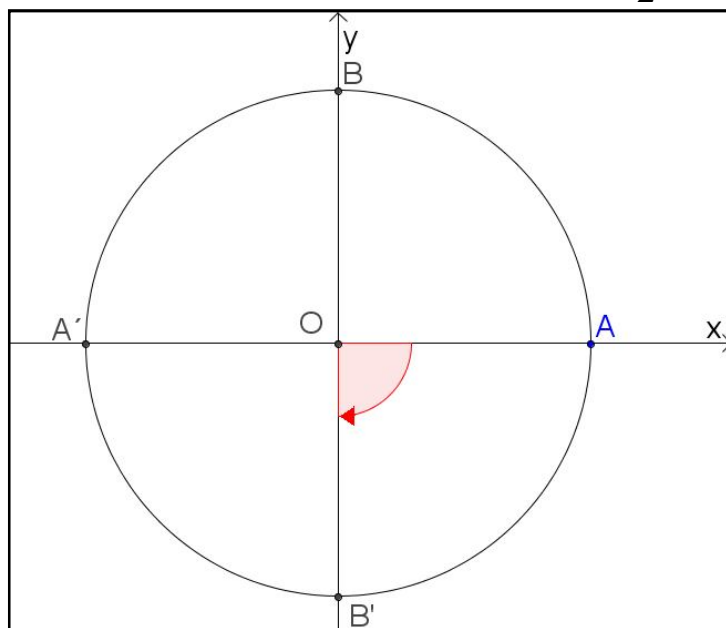
Λύση: Ισχύει $\eta\mu(-\frac{\pi}{2}) = -1$. Άρα,

$$\eta\mu x = \eta\mu(-\frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = k \cdot 2\pi - \frac{\pi}{2} \\ \text{ή} \\ x = k \cdot 2\pi + \pi - (-\frac{\pi}{2}) \end{cases}, \quad k \in \mathbf{Z}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = k \cdot 2\pi - \frac{\pi}{2} & (1) \\ \text{ή} & , \quad k \in \mathbf{Z} \\ x = k \cdot 2\pi + \frac{3\pi}{2} & (2) \end{cases}$$

Ωστόσο και οι δύο τύποι εκφράζουν τις ίδιες γωνίες και συγκεκριμένα ο καθένας από αυτούς εκφράζει όλες τις γωνίες με τελική πλευρά την ΟΒ΄

(σχ. 5). Για παράδειγμα ο τύπος (1) για $\kappa=1$ και ο τύπος (2) για $\kappa=0$ δίνουν ως αποτέλεσμα την ίδια γωνία $\varphi = \frac{3\pi}{2}$!



ΣΧ. 5

Αφού λοιπόν οι δύο τύποι εκφράζουν ακριβώς τις ίδιες γωνίες, μπορούμε να επιλέξουμε τον ένα από τους δύο, π.χ. να γράψουμε ότι $x = \kappa \cdot 2\pi + \frac{3\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.



Παράδειγμα 3: Να λυθούν οι εξισώσεις: (α) $\eta\mu 2x = \sigma\upsilon\nu 2x$ και

(β) $\eta\mu(2x + \frac{\pi}{3}) = \sigma\upsilon\nu(x - \frac{\pi}{4})$.

Λύση: (α) Από την ταυτότητα $\eta\mu^2 A + \sigma\upsilon\nu^2 A = 1$ και από την υπόθεση $\eta\mu A = \sigma\upsilon\nu A$ έπεται ότι $\eta\mu A = \sigma\upsilon\nu A \neq 0$ (γιατί ;). Επομένως στην εξίσωση μπορούμε να διαιρέσουμε κατά μέλη είτε με $\sigma\upsilon\nu 2x$ είτε με $\eta\mu 2x$:

$$\eta\mu 2x = \sigma\upsilon\nu 2x \Leftrightarrow \frac{\eta\mu 2x}{\sigma\upsilon\nu 2x} = 1 \Leftrightarrow \epsilon\varphi 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = \kappa \cdot \pi + \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \frac{\kappa \cdot \pi}{2} + \frac{\pi}{8},$$

$\kappa \in \mathbb{Z}$.

(β) Επειδή οι γωνίες στους δύο τριγωνομετρικούς αριθμούς δεν εκφράζονται από τον ίδιο τύπο, δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε την ίδια μέθοδο με αυτήν του προηγούμενου ερωτήματος.

Μπορούμε να μετατρέψουμε το ημίτονο σε συνημίτονο ή το αντίστροφο:

$$\eta\mu(2x + \frac{\pi}{3}) = \sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2} - (2x + \frac{\pi}{3})) = \sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{6} - 2x).$$

Άρα, $\eta\mu(2x + \frac{\pi}{3}) = \sigma\upsilon\nu(x - \frac{\pi}{4}) \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{6} - 2x) = \sigma\upsilon\nu(x - \frac{\pi}{4})$. Η τελευταία εξίσωση μετά από πράξεις δίνει ως λύση τις γωνίες της μορφής $x = \frac{5\pi}{36} - \kappa \cdot \frac{2\pi}{3}$ και τις γωνίες της μορφής $x = -\frac{\pi}{12} - \kappa \cdot 2\pi$, όπου $\kappa \in \mathbf{Z}$.

Επειδή η μεταβλητή κ παίρνει ως τιμές όλους τους ακέραιους αριθμούς, τόσο τους θετικούς όσο και τους αρνητικούς, τότε το ίδιο συμβαίνει και με τη μεταβλητή $\lambda = -\kappa$. Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης μπορούν να

εκφραστούν και ως εξής:

$$\begin{cases} x = \lambda \cdot \frac{2\pi}{3} + \frac{5\pi}{36} \\ \text{ή} \\ x = \lambda \cdot 2\pi - \frac{\pi}{12} \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbf{Z}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Να λύσετε τις εξισώσεις:

- 1) (α) $\eta\mu x = 0$ (β) $\eta\mu x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (γ) $\sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (δ) $\sigma\upsilon\nu x = 1$
- 2) (α) $\eta\mu x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ (β) $\eta\mu x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ (γ) $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ (δ) $\sigma\upsilon\nu x = -1$
- 3) (α) $\epsilon\phi x = 0$ (β) $\epsilon\phi x = \sqrt{3}$ (γ) $\sigma\phi x = 1$ (δ) $\sigma\phi x = \frac{\sqrt{3}}{3}$
- 4) (α) $\epsilon\phi x = -\sqrt{3}$ (β) $\epsilon\phi x = -1$ (γ) $\sigma\phi x = -1$ (δ) $\sigma\phi x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
- 5) (α) $(1 - \sigma\upsilon\nu x) \cdot (2\eta\mu x - 1) = 0$ (β) $(2\eta\mu x - 1) \cdot (3\sigma\phi x - \sqrt{3}) \cdot \epsilon\phi x = 0$
- 6) (α) $\epsilon\phi 3x = 1$ (β) $2\sigma\upsilon\nu 2x = \sqrt{2}$ (γ) $\eta\mu 3x = 1$ (δ) $\epsilon\phi(x - \frac{\pi}{4}) = \epsilon\phi x$

7) (α) $\eta\mu 2x + \eta\mu(3x - \frac{\pi}{6}) = 0$ (β) $\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu 2x = 0$

8) (α) $\sigma\phi(2x + \frac{\pi}{3}) = \epsilon\phi x$ (β) $\eta\mu 2x = \sigma\upsilon\nu(3x - \frac{\pi}{8})$

9) (α) $2\sigma\upsilon\nu^2 x - \sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x = 0$ (β) $2\eta\mu^2 x - \eta\mu x - 1 = 0$ (γ) $\epsilon\phi^2 x - \epsilon\phi x = 0$
(δ) $\epsilon\phi^2 x - 2\epsilon\phi x + 1 = 0$

10) (α) $\sigma\upsilon\nu^2 x + 4\eta\mu^2 x = 3$ (β) $\epsilon\phi 2x \cdot \sigma\phi x = 1$

11) (α) $\frac{\eta\mu x - 1}{\eta\mu x + 1} + \frac{4}{1 + \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\eta\mu x + 1}{\eta\mu x}$

(β) $\frac{\eta\mu^2 x - 3}{\eta\mu^2 x + 2} + \frac{5 - \eta\mu^2 x}{\eta\mu^2 x - 2} = \frac{15}{\eta\mu^4 x - 4}$

(γ) $\epsilon\phi x + \sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}$

12) (α) $\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{\eta\mu x}$

(β) $\sigma\phi x + \frac{\eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x} = 2$

(γ) $1 + \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x = \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x$

(δ) $3\eta\mu x + \eta\mu^2 x = 1 + \sigma\upsilon\nu^2 x$

13) (α) $\epsilon\phi^2 x + \sigma\phi^2 x = 2$ (β) $\sigma\phi x + \epsilon\phi x = \frac{2}{\eta\mu x}$

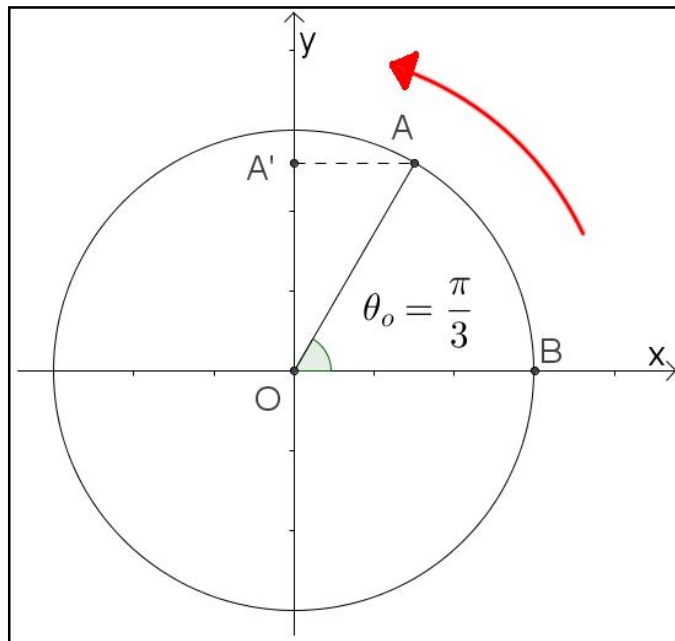
14) (α) $\eta\mu^4 x + \sigma\upsilon\nu^4 x = \frac{1}{2}$ (β) $\eta\mu^6 x + \sigma\upsilon\nu^6 x = \frac{7}{16}$

15) Να βρείτε για ποιες τιμές του x οι παρακάτω συναρτήσεις παίρνουν τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή τους:

(α) $f(x) = 5\eta\mu(x - \frac{\pi}{4})$, $x \in [0, 3\pi]$.

(β) $g(x) = -3\sigma\upsilon\nu(2x - \frac{\pi}{3})$, $x \in [-2\pi, 2\pi]$.

16) Ένα υλικό σημείο Α κινείται κατά τη θετική φορά πάνω στον κύκλο $(O, 3\text{m})$ με γραμμική ταχύτητα $v_A = 2\pi \text{ m/s}$ και τη χρονική στιγμή $t = 0 \text{ s}$ η επιβατική του ακτίνα σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\theta_0 = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$.



ΣΧ. 6

(α) Να βρείτε τη συνάρτηση θέσης σε συνάρτηση με το χρόνο του σημείου A' που είναι η προβολή του υλικού σημείου A πάνω στον άξονα $y'y$.

(β) Αν ένα άλλο υλικό σημείο B κινείται επίσης κατά τη θετική φορά με ταχύτητα $v_B = 3\pi \text{ m/s}$ και τη χρονική στιγμή $t=0 \text{ s}$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\varphi_0 = 0 \text{ rad}$, τότε να βρείτε τις χρονικές στιγμές τις οποίες οι προβολές των υλικών σημείων A και B στον άξονα $y'y$ ταυτίζονται.

(Υπόδειξη: βλέπε και παράρτημα παρακάτω.)

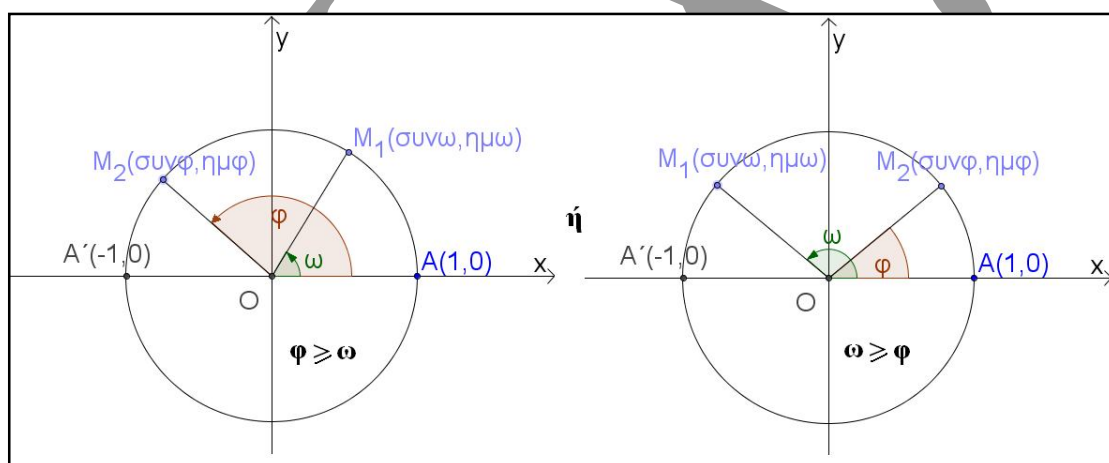
ΕΝΟΤΗΤΑ 7^η: ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ ΓΩΝΙΩΝ.

(1) Συνημίτονο αθροίσματος και διαφοράς γωνιών

Έστω δύο τριγωνομετρικές γωνίες α και β . Τότε υπάρχουν μοναδικοί ακέραιοι αριθμοί κ και λ και μοναδικές γωνίες ω και φ με $\omega, \varphi \in [0, 2\pi)$, ώστε να ισχύουν: $\alpha = \kappa \cdot 2\pi + \omega$ και $\beta = \lambda \cdot 2\pi + \varphi$.^{*} Έστω ότι οι γωνίες α και β έχουν τελικές πλευρές τις OM_1 και OM_2 . Τότε το ίδιο συμβαίνει αντίστοιχα και για τις γωνίες ω και φ (βλ. σχήμα 1). Ως συνέπεια αυτού, έχουμε ότι $\eta\mu\alpha = \eta\mu\varphi$, $\sigma\upsilon\nu\alpha = \sigma\upsilon\nu\varphi$, $\eta\mu\beta = \eta\mu\omega$ και $\sigma\upsilon\nu\beta = \sigma\upsilon\nu\omega$ (τύποι Α'). Επιπλέον, ισχύει ότι:

$\sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) = \sigma\upsilon\nu[(\kappa \cdot 2\pi + \omega) - (\lambda \cdot 2\pi + \varphi)] = \sigma\upsilon\nu[(\kappa - \lambda) \cdot 2\pi + (\omega - \varphi)] = \sigma\upsilon\nu(\omega - \varphi)$,
διότι ο αριθμός $\kappa - \lambda$ είναι ακέραιος.

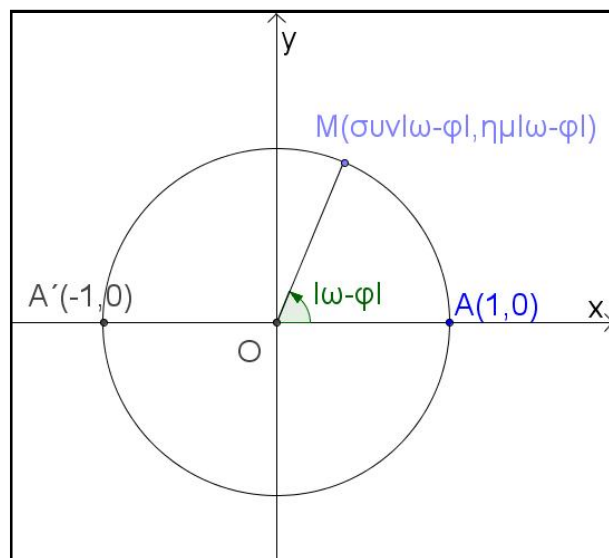
Επειδή $\sigma\upsilon\nu(\omega - \varphi) = \sigma\upsilon\nu[-(\varphi - \omega)] = \sigma\upsilon\nu(\varphi - \omega)$, έπεται ότι $\sigma\upsilon\nu(\omega - \varphi) = \sigma\upsilon\nu(|\omega - \varphi|)$ (γιατί;).



ΣΧ. 1

Έστω OM η τελική πλευρά της τριγωνομετρικής γωνίας $|\omega - \varphi|$ (βλ. σχήμα 2).

^{*} Τα μέτρα των γωνιών εκφράζονται σε rad.



ΣΧ. 2

Τότε η γωνία $M_1\hat{O}M_2$ του σχήματος 1 είναι ίση με τη γωνία $A\hat{O}M$ του σχήματος 2, δηλαδή:

$$M_1\hat{O}M_2 = A\hat{O}M = |\omega - \phi|.$$

Επειδή οι επίκεντρες γωνίες είναι ίσες, θα είναι ίσες και οι αντίστοιχες χορδές, άρα $(M_1M_2) = (AM)$. Έχουμε:

$$\begin{aligned} (M_1M_2) &= (AM) \Leftrightarrow (M_1M_2)^2 = (AM)^2 \Leftrightarrow (\sin\omega - \sin\phi)^2 + (\cos\omega - \cos\phi)^2 = \\ &= (\sin|\omega - \phi| - 1)^2 + (\cos|\omega - \phi| - 0)^2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \sin(|\omega - \phi|) = \sin\omega\cos\phi + \cos\omega\sin\phi. \end{aligned}$$

Όμως $\sin(|\omega - \phi|) = \sin(\omega - \phi) = \sin(\alpha - \beta)$ και επιπλέον χρησιμοποιώντας τους τύπους 1 προκύπτει: $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$ (1).*

Αν στον τύπο (2) θέσουμε όπου β το $-\beta$, τότε προκύπτει:

$$\sin[\alpha - (-\beta)] = \sin\alpha\cos(-\beta) - \cos\alpha\sin(-\beta) \Leftrightarrow \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta, \text{ διότι } \sin(-\beta) = -\sin\beta \text{ και } \cos(-\beta) = \cos\beta. \text{ Συνοψίζοντας:}$$



$$\begin{aligned} \sin(\alpha - \beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \quad (1) \\ \sin(\alpha + \beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \quad (2) \end{aligned}$$

* Σε αντίθεση με το σχολικό βιβλίο, η απόδειξη αυτή είναι πλήρης, δηλαδή ο παραπάνω τύπος έχει αποδειχτεί ότι ισχύει για δύο οποιεσδήποτε γωνίες α και β .

Εφαρμογή 1: Να βρείτε το συνημίτονο των γωνιών $\alpha=15^\circ$ και $\beta=75^\circ$.

Λύση: $\sin(15^\circ)=\sin(45^\circ-30^\circ)=\sin 45^\circ \cdot \sin 30^\circ + \eta\mu 45^\circ \cdot \eta\mu 30^\circ =$
 $= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$

$\sin(75^\circ)=\sin(45^\circ+30^\circ)=\sin 45^\circ \cdot \sin 30^\circ - \eta\mu 45^\circ \cdot \eta\mu 30^\circ =$
 $= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$

(2) Ημίτονο αθροίσματος και διαφοράς γωνιών

Για να εκφράσουμε την παράσταση $\eta\mu(\alpha+\beta)$ σε συνάρτηση με τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών α και β εφαρμόζουμε τους εξής μετασχηματισμούς:

$$\begin{aligned}\eta\mu(\alpha + \beta) &= \sin\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right] = \sin\left[\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right] = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta + \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\eta\mu\beta = \\ &= \eta\mu\alpha\sin\beta + \sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta\end{aligned}$$

Δηλαδή $\eta\mu(\alpha+\beta)=\eta\mu\alpha\sin\beta+\sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta$ (3).

Αν στον τύπο (3) θέσουμε όπου β το $-\beta$ παίρνουμε $\eta\mu[\alpha+(-\beta)]=\eta\mu\alpha\sin(-\beta)+\sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu(-\beta)\Leftrightarrow\eta\mu(\alpha-\beta)=\eta\mu\alpha\sin\beta-\sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta$, διότι $\sin(-\beta)=\sin\beta$ και $\eta\mu(-\beta)=-\eta\mu\beta$. Δείξαμε δηλαδή ότι:



$$\begin{aligned}\eta\mu(\alpha+\beta)&=\eta\mu\alpha\sin\beta+\sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta \quad (3) \\ \eta\mu(\alpha-\beta)&=\eta\mu\alpha\sin\beta-\sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta \quad (4)\end{aligned}$$

Εφαρμογή 2: Να βρείτε το ημίτονο των γωνιών $\alpha=15^\circ$ και $\beta=75^\circ$.

Λύση: $\eta\mu(15^\circ)=\eta\mu(45^\circ-30^\circ)=\eta\mu 45^\circ \cdot \sin 30^\circ - \sigma\upsilon\nu 45^\circ \cdot \eta\mu 30^\circ =$
 $= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$

$\eta\mu(75^\circ)=\eta\mu(45^\circ+30^\circ)=\eta\mu 45^\circ \cdot \sin 30^\circ + \sigma\upsilon\nu 45^\circ \cdot \eta\mu 30^\circ =$
 $= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$

(3) Εφαπτομένη και συνεφαπτομένη αθροίσματος και διαφοράς γωνιών

Έστω δύο γωνίες α και β για τις οποίες ισχύει $\alpha \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$, $\beta \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ και $\alpha + \beta \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Αυτό έχει ως συνέπεια να ορίζονται οι παραστάσεις $\varepsilon\phi(\alpha + \beta)$, $\varepsilon\phi\alpha$ και $\varepsilon\phi\beta$ διότι ισχύει $\sigma\upsilon\nu\alpha \neq 0$, $\sigma\upsilon\nu\beta \neq 0$ και $\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) \neq 0$. Τότε έχουμε:

$$\varepsilon\phi(\alpha + \beta) = \frac{\eta\mu(\alpha + \beta)}{\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta)} = \frac{\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta}{\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\alpha\eta\mu\beta} \cdot \frac{\frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} + \frac{\eta\mu\beta}{\sigma\upsilon\nu\beta}}{1 - \frac{\eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta}{\sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta}} = \frac{\varepsilon\phi\alpha + \varepsilon\phi\beta}{1 - \varepsilon\phi\alpha \cdot \varepsilon\phi\beta}.$$

Αν στον προηγούμενο τύπο θέσουμε όπου β το $-\beta$ με τους αντίστοιχους περιορισμούς, τότε παίρνουμε τον παρακάτω τύπο (6):



$$\varepsilon\phi(\alpha + \beta) = \frac{\varepsilon\phi\alpha + \varepsilon\phi\beta}{1 - \varepsilon\phi\alpha \cdot \varepsilon\phi\beta} \quad (5)$$

$$\varepsilon\phi(\alpha - \beta) = \frac{\varepsilon\phi\alpha - \varepsilon\phi\beta}{1 + \varepsilon\phi\alpha \cdot \varepsilon\phi\beta} \quad (6)$$

Όμοια αποδεικνύονται οι παρακάτω τύποι:



$$\sigma\phi(\alpha + \beta) = \frac{\sigma\phi\alpha \cdot \sigma\phi\beta - 1}{\sigma\phi\beta + \sigma\phi\alpha} \quad (7)$$

$$\sigma\phi(\alpha - \beta) = \frac{\sigma\phi\alpha \cdot \sigma\phi\beta + 1}{\sigma\phi\beta - \sigma\phi\alpha} \quad (8)$$

* Διαιρούμε αριθμητή και παρονομαστή με $\sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta \neq 0$.

Εφαρμογή 3: Να υπολογίσετε την παράσταση $\varepsilon\phi 75^\circ$ και $\sigma\phi 15^\circ$.

$$\begin{aligned}\text{Λύση: } \varepsilon\phi 75^\circ &= \varepsilon\phi(45^\circ + 30^\circ) = \frac{\varepsilon\phi 45^\circ + \varepsilon\phi 30^\circ}{1 - \varepsilon\phi 45^\circ \varepsilon\phi 30^\circ} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} = \\ &= \frac{(3 + \sqrt{3})^2}{(3 - \sqrt{3}) \cdot (3 + \sqrt{3})} = \frac{9 + 2 \cdot 3\sqrt{3} + 3}{9 - 3} = \frac{12 + 6\sqrt{3}}{6} = 2 + \sqrt{3}.\end{aligned}$$

$$\sigma\phi 75^\circ = \sigma\phi(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\sigma\phi 45^\circ \cdot \sigma\phi 30^\circ + 1}{\sigma\phi 30^\circ - \sigma\phi 45^\circ} = \dots = 2 + \sqrt{3}.$$

(4) Παραδείγματα

Παράδειγμα 1: Αν $\eta\mu\alpha = -\frac{4}{5}$ όπου $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, και $\sigma\upsilon\nu\beta = \frac{5}{13}$, όπου $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$, τότε να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\alpha - \beta$.

Λύση: Αφού $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, έπεται ότι $\sigma\upsilon\nu\alpha < 0$ (γιατί;). Όμοια επειδή $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$, έπεται ότι $\eta\mu\beta < 0$. Άρα $\sigma\upsilon\nu\alpha = -\sqrt{1 - \eta\mu^2\alpha} = \dots = -\frac{3}{5}$ και $\eta\mu\alpha = -\sqrt{1 - \sigma\upsilon\nu^2\alpha} = \dots = -\frac{4}{5}$. Επομένως $\eta\mu(\alpha - \beta) = \eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta - \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \eta\mu\beta = \dots = -\frac{56}{65}$ και $\sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta = \dots = \frac{33}{65}$. Επιπλέον ισχύει ότι $\varepsilon\phi(\alpha - \beta) = \frac{\eta\mu(\alpha - \beta)}{\sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta)} = \dots = -\frac{56}{33}$ και $\sigma\phi(\alpha - \beta) = \frac{1}{\varepsilon\phi(\alpha - \beta)} = -\frac{33}{56}$.

Παράδειγμα 2: Να λύσετε την εξίσωση $\sigma\upsilon\nu(x + \frac{\pi}{6}) + 2\eta\mu x = 0$.

Λύση: $\sigma\upsilon\nu(x + \frac{\pi}{6}) + 2\eta\mu x = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{6} - \eta\mu x \eta\mu \frac{\pi}{6} + 2\eta\mu x = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - \frac{1}{2} \eta \mu x + 2 \eta \mu x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3} \sin x - \eta \mu x + 4 \eta \mu x = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 3 \eta \mu x = \sqrt{3} \sin x$ (1). Αν $\sin x = 0$, τότε από την (1) έπεται ότι και $\eta \mu x = 0$, άτοπο από την Πυθαγόρεια τριγωνομετρική ταυτότητα (Ενότητα 2). Άρα $\sin x \neq 0$ και τότε έχουμε:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{\eta \mu x}{\sin x} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \varepsilon \varphi x = \varepsilon \varphi \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \kappa \pi + \frac{\pi}{6}, \kappa \in \mathbf{Z}.$$

Παράδειγμα 3: Να αποδείξετε ότι $\sin(\alpha+\beta) \cdot \sin(\alpha-\beta) = \sin^2 \alpha - \eta \mu^2 \beta = \sin^2 \beta - \eta \mu^2 \alpha$.

$$\begin{aligned} \text{Λύση: } \sin(\alpha+\beta) \cdot \sin(\alpha-\beta) &= (\sin \alpha \cos \beta - \eta \mu \alpha \eta \mu \beta) \cdot (\sin \alpha \cos \beta + \eta \mu \alpha \eta \mu \beta) = \\ &= \sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \eta \mu^2 \alpha \eta \mu^2 \beta = \sin^2 \alpha \cdot (1 - \eta \mu^2 \beta) - (1 - \sin^2 \beta) \eta \mu^2 \beta = \\ &= \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha \eta \mu^2 \beta - \eta \mu^2 \beta + \sin^2 \beta \eta \mu^2 \beta = \sin^2 \alpha - \eta \mu^2 \beta \quad (1) \end{aligned}$$

Αν στο τελευταίο σκέλος της σχέσης (1) θέσουμε $\sin^2 \alpha = 1 - \eta \mu^2 \alpha$ και $\eta \mu^2 \beta = 1 - \sin^2 \beta$, τότε προκύπτει μετά από λίγες πράξεις ότι $\sin^2 \alpha - \eta \mu^2 \beta = \sin^2 \beta - \eta \mu^2 \alpha$.

Παράδειγμα 4: Αν σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει $\frac{\eta \mu A + \eta \mu(B - \Gamma)}{\sin(B - \Gamma)} = \varepsilon \varphi B$, τότε $A = \frac{\pi}{2}$ και αντίστροφα.

Λύση: Επειδή $A + B + \Gamma = \pi \Leftrightarrow A = \pi - (B + \Gamma)$. Άρα $\eta \mu A = \eta \mu[\pi - (B + \Gamma)] = \eta \mu(B + \Gamma)$. Επομένως:

$$\frac{\eta \mu A + \eta \mu(B - \Gamma)}{\sin(B - \Gamma)} = \varepsilon \varphi B \Leftrightarrow \frac{\eta \mu(B + \Gamma) + \eta \mu(B - \Gamma)}{\sin(B - \Gamma)} = \varepsilon \varphi B \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \frac{2 \eta \mu B \sin \Gamma}{\sin(B - \Gamma)} = \frac{\eta \mu B}{\sin B} \Leftrightarrow 2 \sin B \sin \Gamma = \sin(B - \Gamma) \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 2 \sin B \sin \Gamma = \sin B \sin \Gamma + \eta \mu B \eta \mu \Gamma \Leftrightarrow \sin B \sin \Gamma - \eta \mu B \eta \mu \Gamma = 0 \Leftrightarrow \sin(B + \Gamma) = 0$ (1). Όμως $0 < B + \Gamma < \pi$ και η μοναδική γωνία $\varphi \in (0, \pi)$ για την οποία ισχύει $\sin \varphi = 0$ είναι $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Άρα $(1) \Leftrightarrow B + \Gamma = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow A = \frac{\pi}{2}$.

Παράδειγμα 5: Να δείξετε ότι η παράσταση

$$A = \sin x + \sin\left(\frac{2\pi}{3} + x\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{3} + x\right) \text{ είναι ανεξάρτητη του } x.$$

Λύση: Έχουμε:

$$\begin{aligned} A &= \sin x + \sin\frac{2\pi}{3}\sin x - \eta\mu\frac{2\pi}{3}\eta\mu x + \sin\frac{4\pi}{3}\sin x - \eta\mu\frac{4\pi}{3}\eta\mu x = \\ &= \sin x - \sin\frac{\pi}{3}\sin x - \eta\mu\frac{\pi}{3}\eta\mu x - \sin\frac{\pi}{3}\sin x + \eta\mu\frac{\pi}{3}\eta\mu x = \\ &= \sin x - \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\sin x = \sin x - \sin x = 0. \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Να βρείτε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων:

(i) $\epsilon\phi 165^\circ$ (ii) $\epsilon\phi 255^\circ$ (iii) $\eta\mu 298^\circ \cdot \sin 58^\circ - \sin 298^\circ \cdot \eta\mu 58^\circ$
 (iv) $\eta\mu 105^\circ + \sin 105^\circ$.

2) Να αποδείξετε τις παρακάτω ταυτότητες:

(i) $\frac{\eta\mu\alpha + \sin\alpha}{\eta\mu(x-\alpha) \cdot \eta\mu(\alpha-\beta)} + \frac{\eta\mu\beta + \sin\beta}{\eta\mu(x-\alpha) \cdot \eta\mu(\alpha-\beta)} = \frac{\eta\mu x + \sin x}{\eta\mu(x-\alpha) \cdot \eta\mu(x-\beta)}$

(ii) $\eta\mu^2(x+\alpha) + \eta\mu^2(x+\beta) - 2\eta\mu(x+\alpha) \cdot \eta\mu(x+\beta) \cdot \sin(\alpha-\beta) = \eta\mu^2(\alpha-\beta)$

(iii) $\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta} + \frac{\sin(\beta-\gamma)}{\eta\mu\beta \cdot \eta\mu\gamma} + \frac{\sin(\gamma-\alpha)}{\eta\mu\gamma \cdot \eta\mu\alpha} = 0$

(iv) $\epsilon\phi(\alpha+\beta) \cdot \epsilon\phi(\alpha-\beta) = \frac{\epsilon\phi^2\alpha - \epsilon\phi^2\beta}{1 - \epsilon\phi^2\alpha \cdot \epsilon\phi^2\beta}$

(v) $\epsilon\phi\alpha + \epsilon\phi\beta + \epsilon\phi\gamma - \epsilon\phi\alpha \cdot \epsilon\phi\beta \cdot \epsilon\phi\gamma = \frac{\eta\mu(\alpha+\beta+\gamma)}{\sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma}$

(vi) $\epsilon\phi\alpha - \epsilon\phi\beta = \frac{\eta\mu(\alpha-\beta)}{\sin\alpha \cdot \sin\beta}$

(vii) $\eta\mu^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \eta\mu^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$

(viii) $\eta\mu(\alpha+\beta) \cdot \eta\mu(\alpha-\beta) = \eta\mu^2\alpha - \eta\mu^2\beta$

3) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών $\alpha \pm \beta$, όταν:

(i) $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$ με $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ και $\sin \beta = -\frac{12}{13}$ με $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$.

(ii) $\eta \mu \alpha = \frac{1}{2}$ με $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ και $\sin \beta = -\frac{4}{5}$ με $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$.

4) Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω παραστάσεις είναι ανεξάρτητες του x :

(i) $A = \eta \mu^2 x - \eta \mu^2(x + \alpha) + 2\eta \mu \alpha \cdot \eta \mu(x + \alpha) \cdot \sin x$

(ii) $B = \eta \mu^2 x + \eta \mu^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \eta \mu^2\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$

(iii) $\Gamma = \eta \mu^2 x + \eta \mu^2\left(\frac{2\pi}{3} + x\right) + \eta \mu^2\left(\frac{4\pi}{3} + x\right)$

(iv) $\Delta = \sin^2 x + \sin^2\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$

5) Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$.

(i) Αν $\eta \mu(A - B) = 1 - 2\sin A \cdot \eta \mu B$, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

(ii) Αν $\sin(A + B) = 1 - 2\eta \mu A \cdot \eta \mu B$, τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

(iii) Να δείξετε ότι $\epsilon \varphi 2A + \epsilon \varphi 2B + \epsilon \varphi 2\Gamma = \epsilon \varphi 2A \cdot \epsilon \varphi 2B \cdot \epsilon \varphi 2\Gamma$.

(iv) Αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ δεν είναι ορθογώνιο, τότε ισχύει η ισότητα

$$\frac{\sigma \varphi A + \sigma \varphi B}{\epsilon \varphi A + \epsilon \varphi B} + \frac{\sigma \varphi B + \sigma \varphi \Gamma}{\epsilon \varphi B + \epsilon \varphi \Gamma} + \frac{\sigma \varphi \Gamma + \sigma \varphi A}{\epsilon \varphi \Gamma + \epsilon \varphi A} = 1.$$

6) Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

(i) $\eta \mu\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{4} \eta \mu x$ στο $[0, 2\pi]$.

(ii) $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 + \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ στο $(-2\pi, 0)$.

(iii) $\sin x + \epsilon \varphi \alpha \cdot \eta \mu x = 1$ με $\alpha \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$, για κάθε $k \in \mathbf{Z}$.

(iv) $\sin 3x + \eta\mu x \cdot \eta\mu 2x = 0$.

(v) $(\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x) \cdot (\eta\mu 3x - \sigma\upsilon\nu 3x) = 1 - \eta\mu 4x$

7) Να αποδείξετε ότι:

(i) $\sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta \leq 1 + \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta$

(ii) $\sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \eta\mu\beta \leq 1 + \eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta$

(iii) $|\eta\mu(x + y)| \leq |\sigma\upsilon\nu x| + |\sigma\upsilon\nu y|$ για κάθε $x, y \in \mathbf{R}$.

(iv) $|\sigma\upsilon\nu(x + y)| \leq |\sigma\upsilon\nu x| + |\eta\mu y|$ για κάθε $x, y \in \mathbf{R}$.

8) Αν $\epsilon\phi\alpha = \frac{\lambda\eta\mu\gamma}{1 - \lambda\sigma\upsilon\nu\gamma}$ και $\epsilon\phi\beta = \frac{\sigma\upsilon\nu\gamma - \lambda}{\eta\mu\gamma}$, $\lambda \in \mathbf{R}$, να αποδείξετε ότι

$$\alpha + \beta + \gamma = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbf{Z}.$$

9) Αν $\eta\mu\alpha_1 + \eta\mu\alpha_2 + \dots + \eta\mu\alpha_n = 0$ και $\sigma\upsilon\nu\alpha_1 + \sigma\upsilon\nu\alpha_2 + \dots + \sigma\upsilon\nu\alpha_n = 0$, τότε ισχύει: $\eta\mu(x - \alpha_1) + \eta\mu(x - \alpha_2) + \dots + \eta\mu(x - \alpha_n) = 0$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

ΕΝΟΤΗΤΑ 8^η: ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΔΙΠΛΑΣΙΑΣ ΓΩΝΙΑΣ.

(1) Βασικοί Τύποι

Με τη βοήθεια των τύπων της προηγούμενης ενότητας και χρησιμοποιώντας την ισότητα $2\alpha = \alpha + \alpha$, προκύπτουν οι παρακάτω τύποι:

- $\eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha$ (1)

- $\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha = 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1 = 1 - 2\eta\mu^2\alpha$ (2)

- $\epsilon\phi 2\alpha = \frac{2\epsilon\phi\alpha}{1 - \epsilon\phi^2\alpha}$ (3)

Από τους τύπους (2) προκύπτουν επίσης οι τύποι:

- $\eta\mu^2\alpha = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$ (4)

- $\sigma\upsilon\nu^2\alpha = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$ (5)

- $\epsilon\phi^2\alpha = \frac{\eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha} = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha}$ (6)

Αν στους τύπους (4), (5) και (6) θέσουμε όπου α το $\frac{\alpha}{2}$, τότε παίρνουμε:

- $\eta\mu^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu\alpha}{2}$ (4')

- $\sigma\upsilon\nu^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu\alpha}{2}$ (5')

- $\epsilon\phi^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu\alpha}$ (6')

Εφαρμογή 1: Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\omega=15^\circ$. Επειδή $0^\circ < \omega < 90^\circ$ και με τη βοήθεια των τύπων (4), (5) και (6) προκύπτει:

$$\begin{aligned} \bullet \quad \eta\mu 15^\circ &= \sqrt{\frac{1 - \sigma\upsilon\nu 30^\circ}{2}} = \dots = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} \\ \bullet \quad \sigma\upsilon\nu 15^\circ &= \sqrt{\frac{1 + \sigma\upsilon\nu 30^\circ}{2}} = \dots = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} \\ \bullet \quad \varepsilon\varphi 15^\circ &= \sqrt{\frac{1 - \sigma\upsilon\nu 30^\circ}{1 + \sigma\upsilon\nu 30^\circ}} = \dots = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}} = \dots = 2 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

(2) Παραδείγματα

Παράδειγμα 1: Να αποδειχθούν οι ταυτότητες:

A) $\eta\mu 3\alpha = 3\eta\mu\alpha - 4\eta\mu^3\alpha$

B) $\sigma\upsilon\nu 3\alpha = 4\sigma\upsilon\nu^3\alpha - 3\sigma\upsilon\nu\alpha$

Γ) $\eta\mu 2\alpha = \frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1 + \varepsilon\varphi^2\alpha}$

Δ) $\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \frac{1 - \varepsilon\varphi^2\alpha}{1 + \varepsilon\varphi^2\alpha}$

Λύση:

A) $\eta\mu 3\alpha = \eta\mu(2\alpha + \alpha) = \eta\mu 2\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu 2\alpha \cdot \eta\mu\alpha =$
 $= 2\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu^2\alpha + (1 - 2\eta\mu^2\alpha) \cdot \eta\mu\alpha = 2\eta\mu\alpha \cdot (1 - \eta\mu^2\alpha) + (1 - 2\eta\mu^2\alpha) \cdot \eta\mu\alpha =$
 $= 3\eta\mu\alpha - 4\eta\mu^3\alpha.$

B) Όμοια με A)

Γ) $\eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha = 2 \frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} \cdot \sigma\upsilon\nu^2\alpha = 2\varepsilon\varphi\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu^2\alpha =$

$$= 2\varepsilon\varphi\alpha \cdot \frac{1}{1 + \varepsilon\varphi^2\alpha} = \frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1 + \varepsilon\varphi^2\alpha}.$$

Δ) Προκύπτει από την (6) λύνοντας ως προς $\sigma\upsilon\nu 2\alpha$.

Παράδειγμα 2: Να αποδειχθούν οι ταυτότητες:

$$A) \sin^4 \alpha - \eta\mu^4 \alpha = \sin 2\alpha \quad B) \varepsilon\varphi \alpha + \sigma\varphi \alpha = \frac{2}{\eta\mu 2\alpha}.$$

Λύση:

$$A) \sin^4 \alpha - \eta\mu^4 \alpha = (\sin^2 \alpha - \eta\mu^2 \alpha) \cdot (\sin^2 \alpha + \eta\mu^2 \alpha) = \sin^2 \alpha - \eta\mu^2 \alpha = \sin 2\alpha.$$

$$B) \varepsilon\varphi \alpha + \sigma\varphi \alpha = \frac{\eta\mu \alpha}{\sigma\upsilon \nu \alpha} + \frac{\sigma\upsilon \nu \alpha}{\eta\mu \alpha} = \frac{\eta\mu^2 \alpha + \sigma\upsilon \nu^2 \alpha}{\eta\mu \alpha \cdot \sigma\upsilon \nu \alpha} = \frac{1}{\frac{1}{2} \cdot 2\eta\mu \alpha \sigma\upsilon \nu \alpha} = \frac{2}{\eta\mu 2\alpha}.$$

Παράδειγμα 3: Να υπολογιστούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας $\frac{\alpha}{2}$, αν είναι γνωστό ότι $\eta\mu \alpha = \frac{12}{13}$ και $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

Λύση: Επειδή $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, έπεται ότι $\sigma\upsilon \nu \alpha < 0$ και άρα

$$\sigma\upsilon \nu \alpha = -\sqrt{1 - \eta\mu^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{144}{169}} = -\sqrt{\frac{25}{169}} = -\frac{5}{13}.$$

Επειδή $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, έπεται ακόμη ότι $\frac{\alpha}{2} \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ και άρα οι

τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας $\frac{\alpha}{2}$ είναι θετικοί. Με τη βοήθεια επιπλέον των τύπων (4'), (5') και (6') έχουμε:

$$\eta\mu \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \sigma\upsilon \nu \alpha}{2}} = \dots = \frac{3\sqrt{13}}{13}, \quad \sigma\upsilon \nu \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \sigma\upsilon \nu \alpha}{2}} = \dots = \frac{2\sqrt{13}}{13}$$

$$\text{και } \varepsilon\varphi \frac{\alpha}{2} = \frac{\eta\mu \frac{\alpha}{2}}{\sigma\upsilon \nu \frac{\alpha}{2}} = \frac{3}{2}. \text{ Ακόμη } \sigma\varphi \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\varepsilon\varphi \frac{\alpha}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Παράδειγμα 4: Να λύσετε την εξίσωση $\varepsilon\phi 2x = \sigma\upsilon\nu x$.

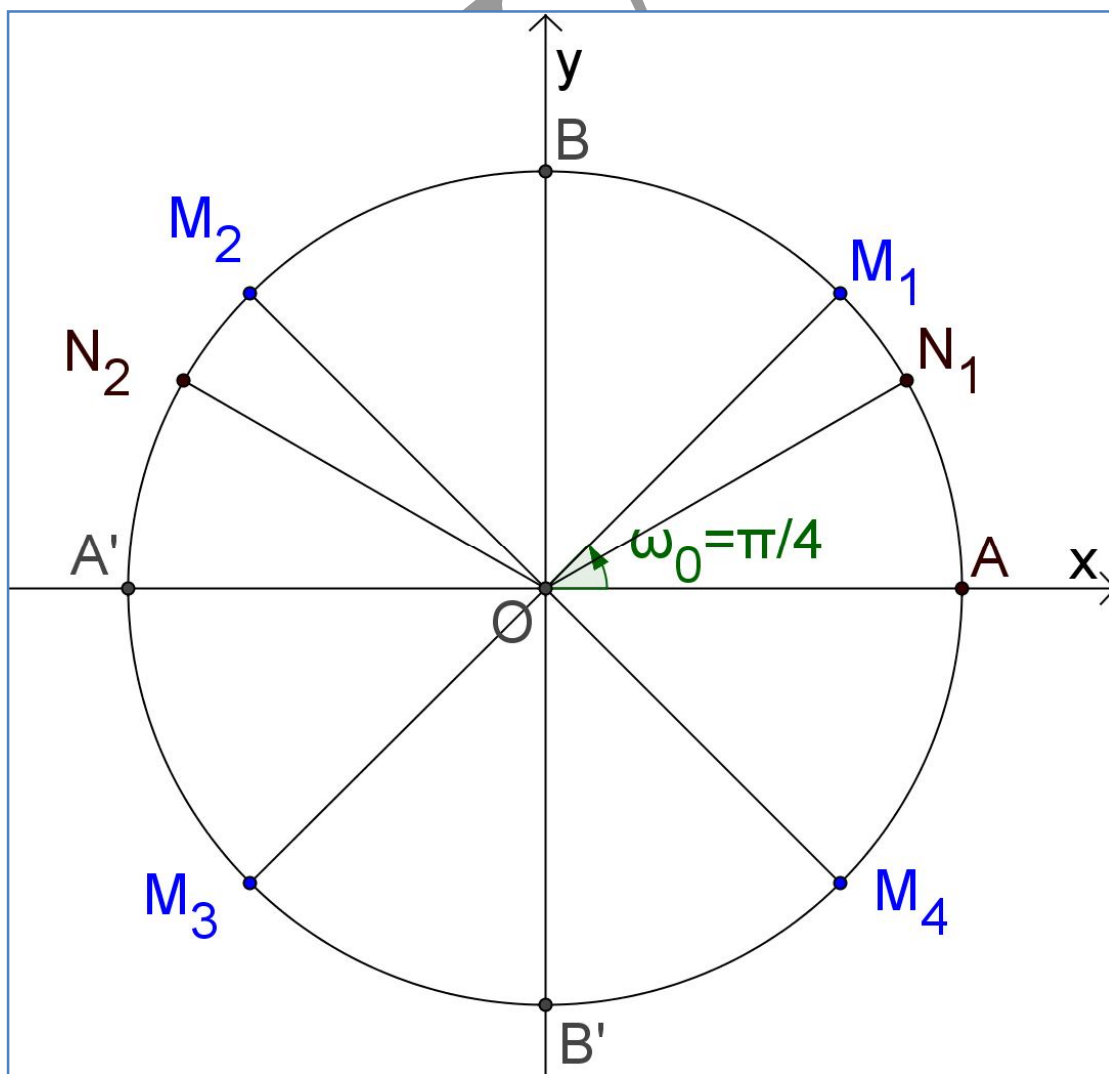
Λύση: Η παράσταση ορίζεται, όταν $\sigma\upsilon\nu 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$

$x \neq k\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ για κάθε $k \in \mathbf{Z}$. Όμως οι γωνίες της μορφής $\omega = k\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ για

$k=0$ ή 1 ή 2 ή 3 προκύπτουν να είναι οι $\omega_0 = \frac{\pi}{4}$, $\omega_1 = \frac{3\pi}{4}$, $\omega_2 = \frac{5\pi}{4}$,

$\omega_3 = \frac{7\pi}{4}$ με αντίστοιχες τελικές πλευρές OM_1 , OM_2 , OM_3 , και OM_4 όπως

φαίνεται στο σχήμα παρακάτω. Όλες οι άλλες γωνίες αυτής της μορφής έχουν επίσης ως τελικές πλευρές μία ακριβώς από τις OM_1 , OM_2 , OM_3 , και OM_4 .



Επομένως οι περιορισμοί αναφέρονται στις γωνίες που δεν έχουν ως τελικές πλευρές τις OM_1 , OM_2 , OM_3 , και OM_4 . Με τους περιορισμούς αυτούς έχουμε:

$$\begin{aligned} \varepsilon\varphi 2x = \sigma\upsilon\nu x &\Leftrightarrow \frac{2\varepsilon\varphi x}{1 - \varepsilon\varphi^2 x} = \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \frac{2 \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}}{1 - \frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}} = \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \frac{2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x} = \sigma\upsilon\nu x \\ &\Leftrightarrow \frac{2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu 2x} = \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow 2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu 2x \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x (2\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu 2x) = 0 \Leftrightarrow \\ &\sigma\upsilon\nu x (2\eta\mu^2 x + 2\eta\mu x - 1) = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = 0 \text{ ή } 2\eta\mu^2 x + 2\eta\mu x - 1 = 0. \end{aligned}$$

- $\sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbf{Z}$. Οι γωνίες αυτής της μορφής έχουν τελική πλευρά την OB ή την OB' και επομένως είναι δεκτές.
- $2\eta\mu^2 x + 2\eta\mu x - 1 = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = \frac{1}{2}$ ή $\eta\mu x = -1$.

Όμως $\eta\mu x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \kappa 2\pi + \frac{\pi}{6} \\ \text{ή} \\ x = \kappa 2\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases}$, $\kappa \in \mathbf{Z}$. Οι γωνίες αυτής της

μορφής έχουν ως τελικές πλευρές είτε αυτή της γωνίας $\pi/6$, δηλαδή την ON_1 , είτε την τελική πλευρά της $5\pi/6$, δηλαδή την ON_2 . Άρα είναι δεκτές. Ακόμη $\eta\mu x = -1 \Leftrightarrow x = \kappa 2\pi + \frac{3\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbf{Z}$. Οι γωνίες αυτής της μορφής έχουν τελική πλευρά την OB' , η οποία είναι μερική λύση της προηγούμενης περίπτωσης, δηλαδή της $\sigma\upsilon\nu x = 0$.

Συνοψίζοντας, έχουμε ότι $\varepsilon\varphi 2x = \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ για κάθε $\kappa \in \mathbf{Z}$ ή $x = \kappa 2\pi + \frac{\pi}{6}$ για κάθε $\kappa \in \mathbf{Z}$ ή $x = \kappa 2\pi + \frac{5\pi}{6}$ για κάθε $\kappa \in \mathbf{Z}$.

Παράδειγμα 5: Να προσδιοριστούν αριθμοί α και β , ώστε να ισχύει

$$\frac{1}{\eta\mu x} = \alpha \sigma\phi \frac{x}{2} + \beta \sigma\phi x \quad (1) \text{ για κάθε πραγματικό αριθμό } x \text{ για το οποίο έχει}$$

νόημα η παράσταση. Ύστερα να υπολογιστεί το άθροισμα:

$$\frac{1}{\eta\mu \alpha} + \frac{1}{\eta\mu 2\alpha} + \frac{1}{\eta\mu 4\alpha} + \dots + \frac{1}{\eta\mu 2^v \alpha}.$$

Λύση: Η παράσταση ορίζεται, όταν $\eta\mu x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi$ για κάθε $k \in \mathbf{Z}$ (2) και

όταν $\eta\mu \frac{x}{2} \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2k\pi$ για κάθε $k \in \mathbf{Z}$ (3). Από τη συναλήθευση των

(2) και (3) έπεται ότι $x \neq k\pi$ για κάθε $k \in \mathbf{Z}$ (γιατί;). Έστω ότι υπάρχουν α

και β ώστε να ισχύει η (1) (αναγκαίες συνθήκες). Τότε π.χ. για $x = \frac{\pi}{2}$, θα

$$\text{ισχύει (1)} \Rightarrow \frac{1}{\eta\mu \frac{\pi}{2}} = \alpha \sigma\phi \frac{\pi}{4} + \beta \sigma\phi \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = 1 \text{ και για π.χ. } x = \frac{\pi}{3} \text{ θα ισχύει}$$

$$(1) \Rightarrow \frac{1}{\eta\mu \frac{\pi}{3}} = \alpha \sigma\phi \frac{\pi}{6} + \beta \sigma\phi \frac{\pi}{3} \Rightarrow \dots \Rightarrow \beta = -1. \text{ Οι συνθήκες αυτές όμως}$$

αναγκαίες όχι ικανές, δηλαδή αν η (1) ισχύει για κάθε $x \neq k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, τότε τα α και β θα έχουν τις τιμές που βρήκαμε. Όμως δεν γνωρίζουμε αν η (1) ισχύει για κάθε $x \neq k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Επομένως πρέπει να επαληθεύσουμε ότι η (1) ισχύει για κάθε $x \neq k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, όταν $\alpha = 1$ και $\beta = -1$:

$$\frac{1}{\eta\mu x} = \sigma\phi \frac{x}{2} - \sigma\phi x \Leftrightarrow \frac{1}{\eta\mu x} = \frac{\sigma\mu \frac{x}{2}}{\eta\mu \frac{x}{2}} - \frac{\sigma\mu x}{\eta\mu x} \Leftrightarrow \frac{1}{\eta\mu x} = \frac{\eta\mu x \sigma\mu \frac{x}{2} - \sigma\mu x \eta\mu \frac{x}{2}}{\eta\mu x \eta\mu \frac{x}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu \frac{x}{2} = \eta\mu x \sigma\mu \frac{x}{2} - \sigma\mu x \eta\mu \frac{x}{2} \Leftrightarrow \eta\mu \frac{x}{2} = \eta\mu \left(x - \frac{x}{2} \right) \Leftrightarrow \eta\mu \frac{x}{2} = \eta\mu \frac{x}{2} \text{ ισχύει.}$$

Εφαρμόζοντας την ισότητα (1) για $x = \alpha, 2\alpha, 4\alpha, \dots, 2^v \alpha$ και με πρόσθεση

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{\eta\mu \alpha} = \sigma\phi \frac{\alpha}{2} - \sigma\phi \alpha \\ \frac{1}{\eta\mu 2\alpha} = \sigma\phi \alpha - \sigma\phi 2\alpha \\ \frac{1}{\eta\mu 4\alpha} = \sigma\phi 2\alpha - \sigma\phi 4\alpha \\ \dots \dots \dots \\ \frac{1}{\eta\mu 2^v \alpha} = \sigma\phi 2^{v-1} \alpha - \sigma\phi 2^v \alpha \end{array} \right\} \begin{array}{l} (+) \\ \Rightarrow \end{array}$$

κατά μέλη παίρνουμε:

$$\frac{1}{\eta\mu\alpha} + \frac{1}{\eta\mu 2\alpha} + \frac{1}{\eta\mu 4\alpha} + \dots + \frac{1}{\eta\mu 2^v \alpha} = \sigma\phi \frac{\alpha}{2} - \sigma\phi 2^v \alpha.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Να υπολογίσετε την τιμή των παρακάτω παραστάσεων:

(α) $2\eta\mu \frac{\pi}{12} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{12}$ (β) $1 - 2\eta\mu^2 \frac{\pi}{8}$ (γ) $2\sigma\upsilon\nu^2 135^\circ - 1$

(δ) $\frac{2\epsilon\phi \frac{\pi}{8}}{1 - \epsilon\phi^2 \frac{\pi}{8}}$

2) Όμοια: (α) $2\eta\mu \frac{3\pi}{4} \sigma\upsilon\nu \frac{3\pi}{4}$ (β) $2\sigma\upsilon\nu^2 \frac{\pi}{12} - 1$

3) Να αποδείξετε τις παρακάτω ταυτότητες:

(α) $(\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha)^2 = 1 + 2\eta\mu 2\alpha$ (β) $\frac{1 - \eta\mu^2 \alpha}{\eta\mu 2\alpha} = \frac{\sigma\phi\alpha}{2}$

(γ) $3 - 4\sigma\upsilon\nu 2\alpha + \sigma\upsilon\nu 4\alpha = 8\eta\mu^4 \alpha$ (δ) $\sigma\upsilon\nu^4 \alpha = \frac{1}{8}\sigma\upsilon\nu 4\alpha + \frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu 2\alpha + \frac{3}{8}$

(ε) $\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\alpha} = \epsilon\phi 2\alpha + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu 2\alpha}$ (στ) $\eta\mu^4 \alpha + \sigma\upsilon\nu^4 \alpha = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu^2 2\alpha}{2}$

(ζ) $4(\eta\mu^6 \alpha + \sigma\upsilon\nu^6 \alpha) = 1 + 3\sigma\upsilon\nu^2 2\alpha$

(η) $\frac{\eta\mu^4 \alpha + 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha - \sigma\upsilon\nu^4 \alpha}{\epsilon\phi 2\alpha - 1} = \sigma\upsilon\nu 2\alpha$

4) (α) Αν $\eta\mu\alpha = \frac{12}{13}$ και $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας 2α .

(β) Αν $\epsilon\phi\alpha = -\frac{3}{4}$ και $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών 2α , 3α και 4α .

(γ) Αν $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$ και $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών $\frac{\alpha}{2}$ και $\frac{\alpha}{4}$.

5) Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

(α) $\eta\mu 2x = \sqrt{3}\eta\mu x$ (β) $\sigma\upsilon\nu 2x - \sigma\upsilon\nu^2 x = 0$ (γ) $\sigma\upsilon\nu 2x + \eta\mu^2 x = 0$

(δ) $\sigma\upsilon\nu x - 2\eta\mu \frac{x}{2} = 1$ (ε) $\sigma\upsilon\nu 2x - 4\sigma\upsilon\nu x - 5 = 0$ (στ) $\eta\mu 2x = \epsilon\phi x$

(ζ) $\sigma\upsilon\nu 2x - 2\sigma\upsilon\nu^2 \frac{x}{2} + 1 = 0$ (η) $\sigma\upsilon\nu 2x + 10\eta\mu^2 \frac{x}{2} - 2 = 0$

(θ) $2\eta\mu^2 x + \eta\mu^2 2x = 2$ (ι) $\sigma\upsilon\nu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 2x = \frac{1}{2}$

6) (α) Να εκφράσετε την παράσταση $\eta\mu^6 \alpha + \sigma\upsilon\nu^6 \alpha$ σε συνάρτηση με το $\sigma\upsilon\nu 2\alpha$.

(β) Για ποιες τιμές του α η παράσταση αυτή λαμβάνει την ελάχιστη τιμή της;

7) Να αποδείξετε τις παρακάτω ισότητες:

(α) $\frac{1 + \epsilon\phi \alpha \cdot \epsilon\phi 2\alpha}{1 - \epsilon\phi \alpha \cdot \epsilon\phi 2\alpha} = \frac{\sigma\upsilon\nu \alpha}{\sigma\upsilon\nu 3\alpha}$ (β) $\frac{\sigma\upsilon\nu^2 2\alpha}{\sigma\phi \alpha - \epsilon\phi \alpha} = \frac{\eta\mu 4\alpha}{4}$

(γ) $\frac{\eta\mu 4\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu 4\alpha} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu \alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu \alpha} = \epsilon\phi \frac{\alpha}{2}$

(δ) $\frac{3\sigma\upsilon\nu \alpha + \sigma\upsilon\nu 3\alpha}{3\eta\mu \alpha - \eta\mu 3\alpha} = \sigma\phi^3 \alpha$

8) Να αποδείξετε τις παρακάτω ισότητες:

(α) $\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{7} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi}{7} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{4\pi}{7} = -\frac{1}{8}$ (β) $\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{7} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi}{7} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{3\pi}{7} = \frac{1}{8}$

9) Να αποδείξετε ότι:

(α) $\sigma\upsilon\nu \frac{\alpha}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{\alpha}{4} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{\alpha}{8} \cdot \dots \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{\alpha}{2^v} = \frac{\eta\mu \alpha}{2^v \eta\mu \frac{\alpha}{2^v}}$

$$(\beta) \text{ (i) } 1 - \varepsilon\varphi^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{2\varepsilon\varphi \frac{\alpha}{2}}{\varepsilon\varphi\alpha} \text{ και}$$

$$\text{(ii) } \left(1 - \varepsilon\varphi^2 \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \left(1 - \varepsilon\varphi^2 \frac{\alpha}{4}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \varepsilon\varphi^2 \frac{\alpha}{2^v}\right) = \frac{2^v \varepsilon\varphi \frac{\alpha}{2^v}}{\varepsilon\varphi\alpha}$$

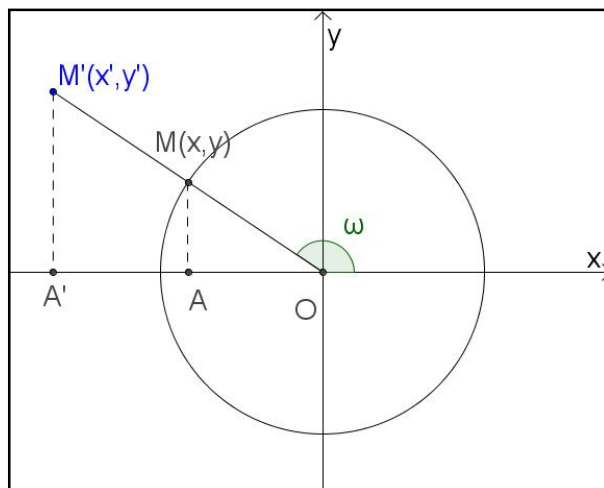
$$10) (\alpha) \text{ Αν } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \text{ τότε να αποδείξετε ότι } 1 + \varepsilon\varphi\alpha < \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$(\beta) \text{ Αν } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ και } 0 < \beta < \frac{\pi}{2} \text{ τότε να αποδείξετε ότι}$$

$$\varepsilon\varphi \frac{\alpha + \beta}{2} \leq \frac{\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta}{2}.$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Έστω ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων και η γωνία $\hat{\omega} = x\hat{O}M'$ (βλ. σχήμα παρακάτω) με $M'(x',y')$. Αν $M(x,y)$ είναι το σημείο τομής της ημιευθείας OM' με τον τριγωνομετρικό κύκλο, τότε να δείξετε ότι: $x' = \rho \cdot \sigma\upsilon\nu\omega$ και $y' = \rho \cdot \eta\mu\omega$, όπου $\rho = OM'$.



Απόδειξη: Έστω ότι η ημιευθεία OM' δεν ταυτίζεται με καμία από τις ημιευθείες Ox , Ox' , Oy και Oy' . Τότε από την ομοιότητα των τριγώνων OAM και $OA'M'$ προκύπτει:

$$\frac{OM'}{OM} = \frac{OA'}{OA} = \frac{A'M'}{AM} \Leftrightarrow \frac{\rho}{1} = \frac{|x'|}{|x|} = \frac{|y'|}{|y|}. \text{ Όμως τα σημεία } M \text{ και } M'$$

βρίσκονται στο ίδιο τεταρτημόριο, οπότε οι αριθμοί x και x' όπως και οι αριθμοί y και y' είναι ομόσημοι. Άρα $\rho = \frac{x'}{x} = \frac{y'}{y}$. Επομένως

$$x' = \rho \cdot x = \rho \cdot \sigma\upsilon\nu\omega \text{ και } y' = \rho \cdot y = \rho \cdot \eta\mu\omega.$$

Αν η ημιευθεία OM' βρίσκεται πάνω στον άξονα $x'x$ ή πάνω στον άξονα $y'y$, τότε εύκολα διαπιστώνουμε ότι ισχύουν αντίστοιχα $y' = \rho \cdot \eta\mu\omega = 0$ ή $x' = \rho \cdot \sigma\upsilon\nu\omega = 0$.

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Σ. Ανδρεαδάκης, Β. Κατσαργύρης, Σ. Παπασταυρίδης, Γ. Πολύζος, Α. Σβέρκος (2012). ΑΛΓΕΒΡΑ Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ. Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και εκδόσεων «Διόφαντος».
- Τζουβάρας Θ., Τζιρώνης Κ. (1998). Άλγεβρα Β΄ Λυκείου. Εκδόσεις Σαββάλας.
- Στεργίου Χ., Νάκης Χ., Μπεληγιάννης Α. (2004). Μαθηματικά για Μαθηματικούς (Διαγωνισμός ΑΣΕΠ). Εκδόσεις Σαββάλας.
- Ζήβα Μ. (1984). Τριγωνομετρία. Εκδόσεις GOUTENBERG.
- Σπανδάγου Β., Κόκκινου Μ, Μουρατίδη Χρ. (1991). Άλγεβρα Α΄ Λυκείου. Εκδόσεις Αίθρα.
- Λεβέτα Αλκιβιάδη (1996). Άλγεβρα Β΄ Λυκείου (αυτοέκδοση).
- Μπάρλας Αναστ. (2010). Άλγεβρα Β΄ Λυκείου. Εκδόσεις Ελληνοεκδοτική.
- Ξένου Θ. (1998). Άλγεβρα Β΄ Λυκείου. Εκδόσεις Ζήτη.